UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01215352 4

Beltrami, Eugenio
Sull'uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell'elasticita

QA
556
B4

SULL' USO DELLE COORDINATE CURVILINEE

NELLE

TEORIE DEL POTENZIALE E DELL'ELASTICITÀ

MEMORIA

DEL PROF. EUGENIO BELTRAMI

Letta nella Sessione 12 Aprile 1885.

È noto che l'illustre Maxwell, cercando di dare una forma precisa alle idee di Faraday circa l'esistenza di un mezzo che servirebbe alla propagazione delle azioni elettriche, e che sostituirebbe le cosidette azioni a distanza, è giunto a dimostrare che le forze emananti da un'ordinaria distribuzione di massa, in due ed in tre dimensioni, possono essere effettivamente sostituite, in ogni punto dello spazio, dalle forze dovute ad un certo sistema, esattamente definito, di pressioni e di tensioni analoghe a quelle che regnano nell'interno d'un fluido o d'un mezzo elastico. E propriamente, denotando con V l'ordinaria funzione potenziale dell'immaginata distribuzione di spazio e di superficie e con X_n, Y_n, Z_n le componenti, secondo tre assi ortogonali delle x, y, z, della pressione unitaria esercitata sopra un elemento piano di normale n, le relazioni trovate da Maxwell sono le seguenti:

$$X_x = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\Delta_1 V, \qquad Y_z = Z_y = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z},$$

$$Y_y = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\Delta_1 V, \qquad Z_x = X_z = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$Z_z = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{8\pi}\Delta_1 V; \qquad X_y = Y_x = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y},$$

dove si è posto

$$\Delta_1 V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

Il sistema di pressioni definito da queste formole, delle quali io ho dato una dimostrazione diretta nella Nota *Sulla rappresentazione delle forze newtoniane per mezzo*

LIBRARY
APR 17 1978
UNIVERSITY OF TORONTO

di forze elastiche (Atti del R. Istituto Lombardo, 1884), genera un campo di forza assolutamente identico a quello che si suole considerare come definito dall' ordinaria funzione potenziale V.

Avendo intrapreso varie ricerche sulle formole di Maxwell, all' uopo di analizzarne il significato e di giungere possibilmente alla loro interpretazione ed alla loro genesi dinamica, ho dovuto, fra altre cose, esaminare il grado di generalità inerente alle formole stesse, cioè la loro eventuale dipendenza dalla natura dello spazio.

Il procedimento che si offeriva spontaneamente per tale indagine era la deduzione *diretta* delle formole stesse, nell' ipotesi che le coordinate di riferimento fossero assolutamente generali, cioè curvilinee, oblique e considerate come indipendenti da qualunque nesso prestabilito colle ordinarie coordinate cartesiane. Ora tale deduzione non era priva di difficoltà, non solo per la mancata possibilità d' invocare la maggior parte delle proposizioni su cui si fonda l' ordinaria teoria, ma eziandio in causa della ben nota complicazione che le coordinate curvilinee introducono nelle formole relative all' elasticità, complicazione la quale, del resto, come ho già avuto occasione di mostrare altrove (Memoria *Sulle equazioni generali dell' elasticità*, Annali di Matematica, 1881), non è un fatto meramente algoritmico, ma ha la sua radice appunto nell' anzidetta questione della natura dello spazio. Quì poi queste difficoltà diventavano maggiori in causa della rimossa ipotesi dell' ortogonalità (*). Ciò non ostante, stabilendo certe proposizioni preliminari ed usando opportuni artifizii, ho potuto giungere alla meta e porre in sodo la generalità del risultato ottenuto da Maxwell, con che veniva posta una base più sicura alle ricerche cui alludevo dianzi.

Benchè le conclusioni cui sono fin quì pervenuto in tali ricerche sieno ancora troppo immature ed incomplete perchè possa sembrarne giustificata la pubblicazione, anche parziale, ho tuttavia creduto utile far conoscere la serie dei procedimenti analitici che mi hanno condotto alla dimostrazione generale delle formole di Maxwell, poichè tali procedimenti possono essere opportunamente invocati anche per altri scopi. Essi conducono infatti a stabilire nel modo più generale tutte le proposizioni fondamentali della teoria del potenziale e di quella dell' elasticità. Rispetto alla prima, massimamente, si troveranno quì raccolte, nell' ordine che mi sembra il più naturale e nella forma che mi sembra la più comprensiva, le più importanti equazioni di quel gruppo numeroso e caratteristico che ha, per così dire, il suo centro nel teorema di Green. Nella deduzione di tali equazioni

(*) Nell' interessante sua Nota *Sulle equazioni generali per l' equilibrio dei sistemi continui a tre dimensioni* (Atti della R. Accademia di Torino, t. XX), il Dott. Morera ha già fatto uso di coordinate curvilinee oblique nella deduzione delle equazioni generali per l' equilibrio elastico. Ma le formole da lui stabilite, notevoli per semplicità ed eleganza, implicano l' esistenza di un ordinario sistema di coordinate cartesiane e non potrebbero essere invocate per lo scopo attuale.

interviene, in particolare, una formola che rappresenta la generalizzazione d'un teorema di Gauss e che sembra non essere stata finora notata, benchè costituisca, a mio credere, l'anello più essenziale della catena. Anche rispetto alla parte cinematica della teoria dell'elasticità, cioè rispetto alla teoria della deformazione infinitesima, si troverà indicata una modificazione dell'ordinario procedimento, la quale permette di assegnare ad un tempo tutte sei le caratteristiche della deformazione d'un parallelepipedo elementare obliquo, senza intervento d'alcuna considerazione geometrica ausiliare.

Quanto poi all'utilità di massima che può avere l'uso delle coordinate curvilinee oblique nelle questioni di fisica matematica, indipendentemente dallo scopo particolare in vista del quale esso era quì raccomandato, non è fuor di luogo il notare che stante la frequenza dei casi in cui la natura stessa del problema suggerisce *a priori* un certo sistema di superficie come strumento essenziale di soluzione e stante, d'altronde, la ben nota impossibilità (in generale) di concepire un sistema triplo ortogonale al quale il sistema dato appartenga, è naturale presumere che la trattazione possa essere non di rado agevolata dall'uso di formole non vincolate all'ipotesi della triplice ortogonalità, quand'anche esse possano apparire meno semplici sotto l'aspetto puramente analitico.

Per non dare a questo scritto un'estensione troppo sproporzionata alla parzialità della ricerca che gli ha dato occasione, non ho spinto lo svolgimento delle formole relative all'elasticità fino alla deduzione delle tre equazioni indefinite espresse coi soli spostamenti, deduzione che, come è noto, riesce prolissa anche nel caso dell'ortogonalità. Noterò tuttavia che le formole generali per le componenti di rotazione, le quali hanno un ufficio essenziale in tale deduzione, furono già date da me nel § 11 delle *Ricerche sulla cinematica dei fluidi* (Memorie di quest'Accademia, T. I della Serie III, 1871).

§ 1.

Denotiamo con q_1, q_2, q_3 le coordinate generali di un punto qualunque dello spazio e, indicando con ds l'elemento lineare che ha la sua origine in questo punto ed il suo termine nel punto contiguo $(q_1 + dq_1,\ q_2 + dq_2,\ q_3 + dq_3)$ poniamo

$$ds^2 = \Sigma_{hk} Q_{hk} dq_h dq_k, \qquad (Q_{hk} = Q_{kh}) \tag{1}$$

dove ciascuno degli indici h, k deve prendere successivamente i valori 1, 2, 3. I coefficienti Q_{hk} dell'espressione differenziale quadratica che costituisce il secondo membro della precedente equazione sono funzioni monodrome, continue e finite

delle coordinate q_1, q_2, q_3, funzioni che supporremo soggette alle condizioni che debbono notoriamente verificarsi affinchè l'espressione quadratica anzidetta sia sempre positiva e non si annulli che per $dq_1 = dq_2 = dq_3 = 0$. Una di queste condizioni è che il determinante dei coefficienti Q_{ik} sia maggiore di zero: lo designeremo perciò con Q^2, Q essendo la radice positiva del determinante stesso. Designeremo inoltre con $Q^2 P_{hk}$ il complemento algebrico dell'elemento Q_{hk} in questo determinante, talchè sarà $P_{hk} = P_{kh}$. Le sei quantità Q_{hh}, P_{hh} $(h = 1, 2, 3)$ debbono essere maggiori di zero: quando occorrerà di estrarne la radice quadrata, converremo di assumere sempre questa radice col segno positivo. Indicheremo, per brevità, con 1, 2, 3 le direzioni (in ogni punto) delle linee coordinate, cioè delle linee lungo le quali varia soltanto la coordinata q_1, o soltanto la q_2, o soltanto la q_3, linee che devono sempre intendersi percorse nel senso dell'accrescimento delle rispettive variabili.

Insieme colla formola (1) sussiste quest'altra:

$$(1)_a \qquad ds\,\delta s \cos(ds, \delta s) = \Sigma_{hk} Q_{hk}\, dq_h\, \delta q_k,$$

dove δs è un altro elemento lineare avente in comune col primo l'origine (q_1, q_2, q_3), ma corrispondente ad altri incrementi $(\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3)$ delle coordinate (veggansi in proposito i primi due §§ della Memoria *Sulla teorica generale dei parametri differenziali*, nel T. VIII. Serie II delle Memorie di quest'Accademia: 1869). Le due formole (1), $(1)_a$ contengono implicitamente tutte le determinazioni metriche relative all'assunto sistema di coordinate. Di tali determinazioni, in gran parte notissime, citiamo solo alcune poche che sono indispensabili per l'intelligenza di ciò che segue.

Ponendo nella formola (1)

$$dq_2 = dq_3 = 0, \qquad ds = dq_1 \sqrt{Q_{11}},$$

si ha

$$\delta s \sqrt{Q_{11}} \cos(\delta s, 1) = Q_{11}\delta q_1 + Q_{12}\delta q_2 + Q_{13}\delta q_3,$$

dove $(\delta s, 1)$ è l'angolo che l'elemento δs fa colla direzione 1. Di qui si deduce, designando con n una direzione qualunque e sostituendo a q_1 una coordinata qualunque q,

$$(2) \qquad \sqrt{Q_{11}} \cos(n, i) = \Sigma\, Q \frac{\partial q}{\partial n}.$$

Sia ora n_1 la normale alla superficie $q_1 = Cost.$, diretta in guisa che l'angolo

$(n_1, 1)$ sia *acuto*. Dalla relazione (2) si ricava

$$\Sigma_h Q_{1h} \frac{\partial q_h}{\partial n_1} = \sqrt{Q_{11}} \cos(n_1, 1) ,$$

$$\Sigma_h Q_{2h} \frac{\partial q_h}{\partial n_1} = 0 .$$

$$\Sigma_h Q_{3h} \frac{\partial q_h}{\partial n_1} = 0 .$$

Moltiplicando ordinatamente queste tre equazioni prima per

$$\frac{\partial q_1}{\partial n_1}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial n_1}, \quad \frac{\partial q_3}{\partial n_1},$$

poscia per

$$P_{11}, \quad P_{21}, \quad P_{31}$$

e sommando ciascuna volta, si ottiene

$$1 = \frac{\partial q_1}{\partial n_1} \sqrt{Q_{11}} \cos(n_1, 1) , \qquad \frac{\partial q_1}{\partial n_1} = P_{11} \sqrt{Q_{11}} \cos(n_1, 1) ,$$

donde

$$1 = P_{11} Q_{11} \cos^2(n_1, 1) .$$

Si ha dunque, in generale,

$$(2)_a \qquad \cos(n_i, i) = \frac{1}{\sqrt{P_{ii} Q_{ii}}} , \qquad (i = 1, 2, 3) .$$

Consideriamo una funzione qualunque U delle coordinate q_1, q_2, q_3. L'espressione

$$(3) \qquad \Delta_1 U = \Sigma_{hk} P_{hk} \frac{\partial U}{\partial q_h} \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

è un invariante differenziale di prim'ordine che si designa, come è noto, col nome di *primo parametro differenziale* della funzione U. Se V è un' altra funzione delle coordinate, l'espressione

$$(3)_a \qquad \Delta_1 UV = \Sigma_{hk} P_{hk} \frac{\partial U}{\partial q_h} \frac{\partial V}{\partial q_k} .$$

la quale si riduce alla precedente per $U = V$, è un invariante differenziale della coppia di funzioni (U, V) che si designa, analogamente, col nome di *primo parametro differenziale* di questa coppia.

Torna spesso comodo introdurre le segnature

$$(3)_c \quad \begin{cases} U_k = \Sigma_h P_{hk} \dfrac{\partial U}{\partial q_h} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \Delta_1 U}{\partial \dfrac{\partial U}{\partial q_k}} \,, \\[2ex] V_k = \Sigma_h P_{hk} \dfrac{\partial V}{\partial q_h} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \Delta_1 V}{\partial \dfrac{\partial V}{\partial q_k}} \,, \end{cases}$$

mercè le quali si può scrivere

$$\Delta_1 U = \Sigma_k U_k \frac{\partial U}{\partial q_k} \,; \qquad \Delta_1 UV = \Sigma_k U_k \frac{\partial V}{\partial q_k} = \Sigma_k V_k \frac{\partial U}{\partial q_k} \,.$$

L'espressione

$$(3)_c \qquad \Delta_2 U = \frac{1}{Q} \Sigma_k \frac{\partial (Q U_k)}{\partial q_k}$$

è un'altro invariante differenziale, di second'ordine, della funzione U, il quale si designa col nome di *secondo parametro differenziale* di questa funzione.

Insieme col sistema delle coordinate generali q_1, q_2, q_3 avremo bisogno di considerare un altro sistema, molto particolare, di coordinate curvilinee, che designeremo coi simboli p, q, r. Di queste tre coordinate l'ultima, r, rappresenta la distanza geodetica di un punto qualunque dello spazio da un punto fisso (del resto arbitrario), che diremo *polo*, e le due prime, p e q, sono due parametri atti ad individuare, in modo qualunque, la direzione iniziale del raggio geodetico r, cioè la direzione in cui questo raggio esce dal polo $r = 0$. Le tre nuove coordinate p, q, r individuano esattamente un punto dello spazio, e reciprocamente, almeno entro quel campo, che supporremo sempre finito, nel quale non esiste alcun punto al quale faccia capo più di un raggio geodetico uscente dal polo: a questo campo intenderemo sempre di limitarci, quando faremo uso delle coordinate polari generalizzate p, q, r.

Rispetto a queste coordinate, l'elemento lineare generico ds è definito da un'espressione del tipo

$$(4) \qquad ds^2 = E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2 + dr^2 \,,$$

dove i coefficienti E, F, G sono funzioni di p, q, r. Dal fatto che, nell'intorno

d'ogni punto, la metrica degli spazii qui considerati è identica alla euclidea, segue che i rapporti

$$\frac{E}{r^2}, \quad \frac{F}{r^2}, \quad \frac{G}{r^2}, \quad \frac{H}{r^2}, \qquad \text{dove} \qquad H = \sqrt{EG - F^2},$$

tendono, per $r = 0$, verso limiti finiti e diversi da zero, i cui valori dipendono, in generale, dalle due variabili p, q. Del resto valgono, rispetto all'espressione quadratica *polare* (4), tutte le formole relative all'espressione generale (1), fra le quali citeremo soltanto la seguente

$$(4)_1 \qquad \cos(n, r) = \frac{\partial r}{\partial n},$$

che si deduce dalla (2) come caso particolarissimo.

I parametri differenziali Δ_1, Δ_2 prendono, rispetto alle variabili p, q, r, le forme seguenti:

$$(4)_2 \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta_1 U &= \Delta_1' U + \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2, \\ \Delta_1 UV &= \Delta_1' UV + \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial V}{\partial r}, \\ \Delta_2 U &= \Delta_2' U + \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial r}\left(H\frac{\partial U}{\partial r}\right), \end{aligned} \right.$$

dove Δ'_1, Δ'_2 sono gli analoghi parametri, relativi alla quadratica a *due* variabili

$$Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2,$$

nei coefficienti della quale r si deve considerare come costante.

La forma (4) dell'elemento lineare e le corrispondenti relazioni $(4)_{2,3}$ convengono anche ad un sistema di coordinate meno particolare del precedente: esse si applicano, cioè, anche al caso che le geodetiche r, in luogo di uscire da uno stesso punto, escano *normalmente* da una superficie fissa qualunque. In questo caso le variabili p, q possono considerarsi come coordinate generali dei punti di questa superficie e definiscono il punto di partenza del raggio geodetico r; le funzioni E, F, G tendono, per $r = 0$, verso limiti finiti, dipendenti dalle variabili p, q.

Anche per le cose quì dette circa il sistema delle coordinate p, q, r rimandiamo alla citata Memoria *Sulla teorica generale dei parametri differenziali*, §§ 2 e 3.

§ 2.

Sia φ una funzione delle variabili q_1, q_2, q_3, monodroma, continua e finita in uno spazio che diremo S, e consideriamo l' integrale

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \frac{dS}{Q},$$

esteso a questo spazio, di cui dS è un elemento circostante al punto (q_1, q_2, q_3). Determinando la forma di questo elemento nel modo che risulta dalla decomposizione dello spazio S per mezzo delle tre famiglie di superficie coordinate, cioè ponendo

$$dS = Q dq_1 dq_2 dq_3 ,$$

il precedente integrale equivale a

$$\int\int dq_2 dq_3 \int \frac{d\varphi}{dq_1} dq_1 .$$

Supponiamo primieramente che il sistema di coordinate q_1, q_2, q_3 presenti, in tutto lo spazio S, quel carattere che si potrebbe dire *cartesiano*: supponiamo, cioè, che questo spazio si possa riferire, punto per punto, senza eccezione e senza smembramento nè sovrapposizione di parti, ad uno spazio ordinario nel quale le variabili q_1, q_2, q_3 abbiano il significato di coordinate cartesiane. In tal caso, supponendo ancora, per semplicità, che ogni linea 1 (cioè ogni linea lungo la quale varia la sola coordinata q_1) attraversi in due soli punti la superficie σ che limita lo spazio S, si ha, integrando lungo una di queste linee, nel senso dell'accrescimento di q_1,

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} dq_1 = \varphi'' - \varphi' ,$$

dove φ', φ'' sono i valori che la funzione φ prende rispettivamente nei punti in cui la linea di integrazione entra ed esce dallo spazio S. Ne risulta che il prodotto

$$(\varphi'' - \varphi') dq_2 dq_3$$

rappresenta il contributo recato al proposto integrale dalla porzione, inclusa in S, del canaletto a sezione quadrangolare i cui spigoli sono le quattro linee 1 di parametri (q_2, q_3), $(q_2, q_3 + dq_3)$, $(q_2 + dq_2, q_3)$, $(q_2 + dq_2, q_3 + dq_3)$. Questo canaletto intercetta, sì all' entrata che all' uscita da S, un elemento $d\sigma$ della superficie σ ed un elemento $d\sigma_1$ di quell' altra superficie σ_1 che passa per lo stesso punto e che appartiene al sistema $q_1 = Cost.$ Denotando con n, n_1 le normali a questi due elementi, scelte rispettivamente in modo che la prima sia diretta verso S e la seconda faccia un angolo acuto colla direzione 1, si hanno le seguenti due espressioni equivalenti della sezione retta del canaletto:

$$d\sigma_1 \cos(n_1, 1) = \pm d\sigma \cos(n, 1),$$

dove il segno superiore vale per l' entrata, l' inferiore per l' uscita. Si ha d' altronde

$$d\sigma_1 = Q\sqrt{P_{11}}\, dq_2 dq_3, \qquad \cos(n_1, 1) = \frac{1}{\sqrt{P_{11}Q_{11}}},$$

quindi

$$dq_2 dq_3 = \pm \frac{\sqrt{Q_{11}} \cos(n, 1) d\sigma}{Q},$$

Il contributo del canaletto si riduce per tal modo alla somma di due espressioni della forma

$$-\frac{\varphi\sqrt{Q_{11}} \cos(n, 1) d\sigma}{Q},$$

relative l' una all' entrata e l' altra all' uscita; e se il canaletto attraversasse la superficie in più di due posti, si troverebbe sempre la stessa espressione per ognuno dei tragitti. In base a ciò si ottiene subito la formola generale (*)

$$(5) \qquad \int \frac{\partial\varphi}{\partial q_i} \frac{dS}{Q} = -\int \frac{\varphi\sqrt{Q_{ii}} \cos(n, i)}{Q} d\sigma,$$

che costituisce l' estensione d' un teorema notissimo.

Applicando successivamente quest' equazione a due spazii separati da una superficie, e supponendo che la funzione φ sia monodroma, continua e finita nello

(*) Morera — Nota citata.

spazio totale, si riconosce immediatamente che, nel secondo membro dell' equazione ottenuta sommando le due equazioni relative ai due singoli spazii, si elidono fra loro gli integrali estesi sulla superficie di separazione. Per l' applicabilità del teorema (5) non è dunque necessaria la restrizione, che avevamo dapprima ammessa, del carattere cartesiano di *tutto* lo spazio S: basta che questo spazio sia decomponibile in spazii parziali, ciascuno dei quali possegga separatamente questo carattere.

La formola (5) continua a sussistere anche se la funzione ϑ, restando monodroma e continua, diventa infinita come $1:r$ in punti discreti dello spazio S, r essendo la distanza geodetica di un punto qualunque da uno dei punti d' infinito, o *poli*. Supponiamo, infatti, che ciò avvenga in un sol punto dello spazio S ed applichiamo la formola (5) allo spazio che si ottiene sottraendo da S una piccola sfera geodetica col centro nel polo. Usando le coordinate polari p, q, r, l' elemento di volume dS di questa sfera e l' elemento $d\sigma$ della sua superficie si possono prendere sotto la forma

$$dS = Hdpdqdr\,, \qquad d\sigma = Hdpdq\,;$$

bisogna quindi sottrarre dal primo membro dell' equazione (5) un integrale triplo che si può scrivere così:

$$\int\int dpdq \int_0^r r^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial q_i} \cdot \frac{H}{r^2} \frac{dr}{Q}$$

e dal secondo membro della stessa equazione un integrale doppio che si può scrivere così:

$$r \int\int \frac{r\vartheta \sqrt{Q_{ii}} \cos(r, i)}{Q} \frac{H}{r^2}\, dpdq\,.$$

Ora questi due integrali tendono a zero con r (*): dunque l' equazione (5) resta inalterata quando, come nel caso normale, si estenda l' integrazione, nel primo membro, a *tutto* lo spazio S e, nel secondo, alla *sola* superficie σ, limite di

(*) Per evitare ogni difficoltà rispetto all' evanescenza del primo di questi due integrali, basta considerare il caso in cui ϑ abbia la forma $\vartheta = \vartheta' + \frac{1}{r}$, dove ϑ' è funzione monodroma, continua e finita, giacchè questo è il solo caso praticamente utile (come in una successiva occasione, § 4). Si ha infatti

$$r^2 \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\partial r}{\partial q_i} = -\sqrt{Q_{ii}} \frac{\partial r}{\partial s_i} = \sqrt{Q_{ii}} \cos(r, i).$$

questo spazio. Lo stesso ha luogo, evidentemente, se la funzione φ ha in S più poli discreti.

Abbiamo implicitamente supposto che il punto d'infinito, ossia il polo $r = 0$, fosse a distanza finita dalla superficie σ. Ma il teorema (5) sussiste anche se il polo è sulla superficie. Si sottragga, infatti, dallo spazio S quella porzione di piccola sfera geodetica, col centro nel polo, che cade entro questo spazio. L'integrale triplo che bisogna, in seguito a ciò, sottrarre dal primo membro dell'equazione (5) conserva la stessa forma di dianzi e svanisce istessamente con r. L'integrale doppio che bisogna introdurre nel secondo membro si compone invece di due parti, additiva l'una, sottrattiva l'altra. La parte sottrattiva è dovuta al segmento di superficie sferica che cade entro S, e l'integrale doppio che la rappresenta ha la stessa forma che nel caso del polo interno, talchè svanisce di nuovo con r. La parte additiva è dovuta a quel segmento di superficie σ che cade entro la sfera geodetica, ed è rappresentata da un nuovo integrale doppio che dobbiamo formare. A tal fine riferiamo i punti del segmento di σ a due coordinate ρ, θ di cui la prima sia l'arco geodetico condotto, sulla superficie σ, dal polo $r = 0$ ad un punto qualunque del segmento e la seconda sia un parametro atto ad individuare la direzione iniziale di questo arco, cioè la direzione in cui questo esce dal polo (*). Il quadrato dell'elemento lineare generico di σ assume, con queste coordinate, la nota forma

$$d\rho^2 + K^2 d\theta^2 ,$$

dove K è una funzione di ρ e di θ il cui rapporto a ρ tende, per $\rho = 0$, verso un limite finito dipendente in generale da θ (e ciò anche quando la superficie non ammetta, nel polo, un piano tangente unico e determinato). L'elemento di superficie $d\sigma$ si può, mercè tali coordinate, prendere sotto la forma

$$d\sigma = K d\rho d\theta ,$$

e l'integral doppio di cui abbiamo parlato può quindi scriversi così

$$\int d\theta \int_0^\rho \frac{\rho}{r} r\varphi \frac{\sqrt{Q_{ii}} \cos(n, i)}{Q} \frac{K}{\rho} d\rho .$$

Ora r è la corda (geodetica dello spazio) dell'arco ρ (geodetica della superficie),

(*) Se il polo fosse situato in un punto cuspidale della superficie σ, nel quale tutte le geodetiche (uscenti da questo polo) avessero una direzione iniziale comune, il parametro θ non potrebbe più avere il preciso significato qui detto, ma ognuno vede come questo significato si dovrebbe modificare. Del resto in questo caso K tenderebbe a zero ancora più rapidamente di ρ.

ed il limite del rapporto di queste due grandezze è l'unità. Dunque anche l'integrale in questione svanisce con ρ e per conseguenza con r.

Una particolarità notevole dell'equazione (5) è di conservare la stessa forma così per le coordinate ortogonali, come per le oblique. Nel caso delle coordinate ortogonali essa era già stata stabilita da C. Neumann (*Zur Theorie der Elasticität*, T. 57 del Giornale di Crelle. 1859), ma con intervento delle formole di relazione fra le coordinate curvilinee e le cartesiane, cioè nell'ipotesi, non necessaria, dello spazio euclideo. Nel § 4 della già citata Memoria *Sui parametri differenziali* trovasi pure stabilito un teorema sostanzialmente identico a quello contenuto nella equazione (5), ma in una forma meno esplicita.

§ 3.

Il teorema contenuto nell'equazione (5) è valido qualunque sia il sistema delle coordinate q_1, q_2, q_3, purchè nelle varie parti dello spazio S, al quale quel teorema viene applicato, questo sistema possegga, come si è detto, il carattere cartesiano. Quando questa condizione non è soddisfatta, quel teorema, generalmente parlando, non è più applicabile. Invece d'intraprendere l'esame dei varii casi d'eccezione, il che condurrebbe ad una discussione complicata e, probabilmente, neppure suscettibile d'essere esaurita compiutamente, ci limiteremo a considerare un caso particolare, il quale è forse il solo veramente utile ed importante: il caso, cioè, che le coordinate di riferimento sieno quelle che nel § 1 abbiamo designato con p, q, r. È evidente che questo sistema di coordinate non possiede il carattere cartesiano rispetto ad uno spazio comprendente il polo: si può dire invece ch'esso possiede, rispetto ad un tale spazio, il carattere *polare*, purchè, come ammettiamo, ad ogni punto di questo spazio, eccettuato il polo, corrispondano valori individuati delle tre coordinate p, q, r.

Ciò premesso, consideriamo l'integrale

$$\int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\vec{p}}{r^2}\right)\frac{dS}{H}$$

esteso ad uno spazio S soddisfacente alla condizione or detta, $\vec{p}$ essendo una funzione monodroma, continua e finita delle coordinate p, q, r, avente nel polo un valore unico e determinato che designeremo con $\vec{p}_0$.

Se lo spazio S non contiene il polo $r = 0$, si rientra nel caso del § precedente e dalla formola (5) si ha subito

$$\int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\vec{p}}{r^2}\right)\frac{dS}{H} = -\int \frac{\vec{p}\cos(\nu, r)}{r^2}\, d\sigma\,,$$

ossia (4),

$$(6) \qquad \int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\vec{p}}{r^2}\right)\frac{dS}{H} = \int \vec{p}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma .$$

Quest'equazione, come la (5), non cessa di sussistere se la funzione $\vec{p}$ diventa infinita come $1 : r$ in punti discreti dello spazio S o della superficie σ.

Ma se il polo $r = 0$ giace nello spazio S o sulla superficie σ, quest'equazione non è più vera, sia perchè l'equazione (5) non può più essere invocata, sia perchè la funzione che quì terrebbe luogo della $\vec{p}$ del § precedente cessa d'essere monodroma nel polo. Bisogna dunque rinnovare direttamente il processo di deduzione.

A tal fine decomponiamo lo spazio S in elementi polari, ponendo

$$dS = H dp dq dr$$

e quindi

$$\int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\vec{p}}{r^2}\right)\frac{dS}{H} = \iint dp dq \int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\vec{p}}{r^2}\right) dr .$$

Integrando lungo un raggio geodetico r che, per semplicità, supporremo incontrare in un solo punto la superficie σ, si ha

$$\int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\vec{p}}{r^2}\right) dr = \frac{H\vec{p}}{r^2} - \vec{p}_0\left(lim\,\frac{H}{r^2}\right)_{r=0},$$

dove il limite del quoziente $H : r^2$ è determinato da quei valori dei parametri p, q che individuano il raggio r d'integrazione. Di quì si deduce

$$\int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\vec{p}}{r^2}\right)\frac{dS}{H} = \iint \frac{H\vec{p}\,dp dq}{r^2} - \vec{p}_0 \iint \left(lim\,\frac{H dp dq}{r^2}\right)_{r=0},$$

dove il primo integrale del secondo membro è relativo alla superficie σ. Ora la piramide quadrangolare infinitesima che ha per spigoli le quattro geodetiche (p, q), $(p, q + dq)$, $(p + dp, q)$, $(p + dp, q + dq)$ intercetta su questa superficie un elemento $d\sigma$, di cui è projezione ortogonale la sezione $H dp dq$ fatta nella stessa piramide dalla superficie sferica che ha il centro nel polo ed il cui raggio è la distanza di questo dall'elemento $d\sigma$. Si ha dunque

$$H dp dq = - d\sigma \cos(n, r) = - \frac{\partial r}{\partial n}\,d\sigma$$

e si può scrivere

$$\int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\vec{\varphi}}{r^2}\right)\frac{dS}{H} = \int \vec{\varphi}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma - \vec{\varphi}_0 \int\int \left(\lim \frac{Hdpdq}{r^2}\right)_{r=0}.$$

Osserviamo finalmente che il limite, per $r = 0$, del rapporto

$$\frac{Hdpdq}{r^2}$$

fra l'area $Hdpdq$ della sezione retta della già menzionata piramide e il quadrato della distanza r di questa sezione dal centro è la misura dell'*angolo visuale* dell'elemento $d\sigma$ rispetto al polo, ammesso che i raggi visuali coincidano coi raggi geodetici. Ne risulta che l'integrale

$$\int\int \left(\lim \frac{Hdpdq}{r^2}\right)_{r=0}$$

è la misura dell'angolo visuale dell'intera superficie σ rispetto al polo. Designando quindi quest'angolo visuale con $(\sigma)_0$, si ottiene la formola

$$(6)_a \qquad \int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H\vec{\varphi}}{r^2}\right)\frac{dS}{H} = \int \vec{\varphi}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma - (\sigma)_0\vec{\varphi}_0,$$

la quale è valida sia quando il polo è interno allo spazio S, sia quand'esso è sulla superficie σ; ed è parimente esatta qualunque sia il numero delle volte che un raggio r incontra la superficie σ, purchè, nel computo di $(\sigma)_0$, si consideri come positivo o come negativo l'angolo visuale d'ogni elemento $d\sigma$ secondo che quest'elemento rivolga al polo la sua faccia positiva (di normale n) o la sua faccia negativa. La quantità $(\sigma)_0$ è dunque $= 4\pi$ quando il polo è interno ad S, è (generalmente) $= 2\pi$ quand'esso è sulla superficie σ ed è $= 0$ quando il polo è esterno, nel qual caso infatti la formola $(6)_a$ deve ridursi alla (6). Dalla mutua dipendenza di queste due formole risulta poi che anche la $(6)_a$ continua a sussistere inalterata quando la funzione $\vec{\varphi}$ diventa infinita come $1 : r$ in punti discreti dello spazio S o della superficie σ, purchè tali punti sieno in ogni caso a distanza finita dal polo $r = 0$.

La formola $(6)_a$ costituisce la generalizzazione, forse non ancora avvertita, di un importante teorema dato da Gauss per lo spazio ordinario. Per questo spazio, infatti, r rappresenta il raggio rettilineo che va dal polo ad un punto qualunque, p e q sono le coordinate angolari di questo raggio ed H è, per ogni valore di r,

il prodotto di r^2 per una funzione delle sole variabili p, q; quindi la formola $(6)_a$ diventa

$$\int \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{dS}{r^2} = \int \Phi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - (\sigma)_0 \Phi_0 ,$$

la quale è appunto la formola di Gauss. Facendo $\Phi = 1$, si ottiene la notissima espressione dell' angolo visuale

$$(\sigma)_0 = \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma ,$$

data dallo stesso Autore. In uno spazio qualunque non si può, dalla corrispondente formola $(6)_a$, dedurre un' analoga espressione di $(\sigma)_0$, giacchè non si ha in generale

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{H}{r^2} \right) = 0 ,$$

come avviene nello spazio ordinario. Ma nel seguente § vedremo che un' espressione cosiffatta esiste, come corollario d' un' altra formola, che generalizza il citato teorema di Gauss sotto un aspetto un po' diverso.

La segnatura $(\sigma)_0$, introdotta da C. Neumann, e adoperata quì per designare l' angolo visuale d' una superficie chiusa, si può utilmente estendere, come fa quest' Autore, ad un pezzo qualunque di superficie. Così il simbolo $(d\sigma)_p$ può servire a rappresentare l' angolo visuale, rispetto ad un punto qualunque p, d'un elemento di superficie $d\sigma$, del quale si deve supporre individuata, con una opportuna convenzione, la faccia positiva.

§ 4.

Riprendiamo l' espressione $(3)_c$ del secondo parametro differenziale d' una funzione qualunque U,

$$\Delta_2 U = \frac{1}{Q} \Sigma_k \frac{\partial (Q U_k)}{\partial q_k}$$

e, denotando con V un'altra funzione per ora qualunque, formiamo il prodotto

$$V\Delta_2 U = \frac{V}{Q}\,\Sigma_k \frac{\partial(QU_k)}{\partial q_k} = \frac{1}{Q}\,\Sigma_k \frac{\partial(QVU_k)}{\partial q_k} - \Sigma_k U_k \frac{\partial V}{\partial q_k}\,.$$

Ricordando l'espressione del primo parametro differenziale della coppia di funzione U, V, si ricava di quì l'identità

$$\Delta_1 UV + V\Delta_2 U = \frac{1}{Q}\,\Sigma_k \frac{\partial(QVU_k)}{\partial q_k}\,.$$

ed integrando sopra uno spazio qualunque S

$$\int (\Delta_1 UV + V\Delta_2 U)dS = \Sigma_k \int \frac{\partial(QVU_k)}{\partial q_k}\,\frac{dS}{Q}\,.$$

Se le due funzioni U, V sono monodrome, continue e finite nello spazio S e se della U sono continue e finite anche le derivate prime, i tre integrali contenuti nel secondo membro possono essere trasformati col teorema (5) e si ottiene così l'equazione

$$\int (\Delta_1 UV + V\Delta_2 U)dS + \int V[\Sigma_k U_k \sqrt{Q_{kk}} \cos(n, k)]d\sigma = 0\,,$$

dove n è la normale interna alla superficie σ, limite dello spazio S. Ma (2), $(3)_b$

$$\Sigma_k U_k \sqrt{Q_{kk}} \cos(n, k) = \Sigma_{hk} Q_{hk} U_k \frac{\partial q_h}{\partial n} = \Sigma_{hki} Q_{hk} P_{ki} \frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial q_h}{\partial n} = \Sigma_{ih} \frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial q_h}{\partial n}\,\Sigma_k Q_{hk} P_{ki}\,;$$

dunque, poichè la somma $\Sigma_k Q_{hk} P_{ki}$ è $= 1$ per $h = i$ ed è $= 0$ per $h \gtrless i$, si ha semplicemente

$$\Sigma_k U_k \sqrt{Q_{kk}} \cos(n, k) = \frac{\partial U}{\partial n}\,,$$

e si ottiene così la formola

$$\int (\Delta_1 UV + V\Delta_2 U)dS + \int V\frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma = 0\,, \tag{7}$$

identica a quella notissima che, sotto analoghe condizioni, si stabilisce nello spazio ordinario. Nel § 4 della citata Memoria *Sui parametri differenziali* questa stessa formola è dimostrata per qualunque numero di variabili.

Importa notare che la formola precedente sussiste, come il teorema (5) donde venne dedotta, anche quando la funzione V diventi infinita come $1:r$ in punti discreti dello spazio S o della superficie σ. Ma non si potrebbe fare un' ipotesi analoga rispetto alla funzione U.

Per esaminare come debba modificarsi la formola quando quest' ultima funzione diventa infinita nel modo or detto, poniamo

$$(a) \qquad U = U' + \frac{1}{r},$$

dove U' è una funzione monodroma, continua e finita colle sue derivate prime in tutto lo spazio S ed r è la distanza geodetica del punto qualunque, cui si riferiscono le funzioni U, V, U', da un polo situato in S od in σ. Da ciò segue che, in primo luogo, si ha (7)

$$(b) \qquad \int (\Delta_1 U' V + V \Delta_2 U') dS + \int V \frac{\partial U'}{\partial n} d\sigma = 0 .$$

In secondo luogo, le equazioni $(4)_b$ danno

$$\Delta_1\left(\frac{1}{r}, V\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial V}{\partial r}; \qquad \Delta_2 \frac{1}{r} = -\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{H}{r^2}\right);$$

epperò

$$\Delta_1\left(\frac{1}{r}, V\right) + V\Delta_2 \frac{1}{r} + \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{HV}{r^2}\right) = 0,$$

donde si ricava

$$\int \left\{ \Delta_1\left(\frac{1}{r}, V\right) + V\Delta_2 \frac{1}{r} \right\} dS + \int \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{HV}{r^2}\right)\frac{dS}{H} = 0.$$

Applicando quindi il teorema $(6)_a$, nel supposto che il polo $r = 0$ non cada in uno degli eventuali punti di infinito della funzione V, si ottiene

$$\int \left\{ \Delta_1\left(\frac{1}{r}, V\right) + V\Delta_2 \frac{1}{r} \right\} dS + \int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = (\sigma)_0 V_0 .$$

Sommando membro a membro quest' equazione colla (b) e ricordando la segnatura (a), si trova finalmente

$$(7)_a \qquad \int (\Delta_1 UV + V\Delta_2 U)dS + \int V\frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma = (\sigma)_0 V_0 .$$

Tale è la formola che subentra alla (7), ed in cui questa rientra come caso particolare (supponendo che il polo sia esterno ad S), quando la funzione U diventa infinita come $1:r$ in *un solo* punto di S o di σ, mentre la funzione V può, come prima, diventare infinita allo stesso modo in punti discreti di S o di σ, purchè nessuno di questi punti coincida col polo di U.

Se si suppone che amendue le funzioni U, V sieno, senza eccezione, monodrome, continue e finite colle loro derivate prime in tutto lo spazio S, sussiste non solo l' equazione (7), ma eziandio la seguente, che si deduce da quella permutando fra loro le due funzioni:

$$(c) \qquad \int (\Delta_1 UV + U\Delta_2 V)dS + \int U\frac{\partial V}{\partial n}\,d\sigma = 0 ;$$

epperò, combinando le due equazioni per differenza, si ottiene la nota formola di Green

$$(8) \qquad \int (U\Delta_2 V - V\Delta_2 U)dS + \int \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma = 0 .$$

Se invece si suppone che, continuando la funzione V ad avere le proprietà anzidette, senza eccezione, la funzione U diventi infinita come $1:r$ in *un solo* punto $r=0$ dello spazio S o della superficie σ, combinando per differenza le due equazioni $(7)_a$ e (c), si ottiene l' importantissima formola

$$(8) \qquad \int (U\Delta_2 V - V\Delta_2 U)dS + \int \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma + (\sigma)_0 V_0 = 0 ,$$

che costituisce il teorema di Green propriamente detto.

Abbiamo fatto allusione, nel § precedente, ad una formola che generalizza, in un senso diverso dalla $(6)_a$, il teorema di Gauss ricordato nel § stesso. Questa formola non è altro che la stessa $(7)_a$, qualora si aggiunga l' ipotesi che la fun-

zione U soddisfaccia, in tutto lo spazio S, all' equazione $\Delta_2 U = 0$; essa è quindi la seguente:

$$(9) \qquad \int \Delta_1 UV dS + \int V \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = (\sigma)_0 V_0 .$$

Infatti designando con ν la normale, in un punto qualunque dello spazio S, alla superficie $U = Cost.$ che passa per questo punto, normale diretta nel senso in cui U decresce, si ha (Memoria *Sui parametri differenziali*, § 3)

$$\Delta_1 UV = - \frac{\partial V}{\partial \nu} \sqrt{\Delta_1 U} . \qquad \text{(radicale positivo).}$$

La precedente equazione si può dunque scrivere così:

$$\int \frac{\partial V}{\partial \nu} \sqrt{\Delta_1 U} dS = \int V \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma - (\sigma)_0 V_0 .$$

Ora nello spazio ordinario si soddisfa a tutte le condizioni prescritte in questa formola alla funzione U ponendo

$$U = \frac{1}{r} , \qquad \sqrt{\Delta_1 U} = \frac{1}{r^2} , \qquad \nu = r ,$$

e, in tale ipotesi, la formola stessa coincide esattamente con quella di Gauss.

L' importante corollario al quale abbiamo pur fatto allusione nel § precedente si ottiene ponendo nella formola (9) $V = 1$, con che si ha

$$(9)_a \qquad (\sigma)_0 = \int \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma .$$

Quest' espressione generale dell' angolo visuale d' una superficie chiusa, rispetto ad un punto qualunque dello spazio, corrisponde esattamente a quella, già citata, di Gauss, nella quale U riceve il valore particolare $1 : r$, ammissibile soltanto nello spazio ordinario.

Se anche nell' equazione $(8)_a$ si suppone che U sia una funzione soddisfacente, oltrechè alle condizioni già ammesse, all' equazione $\Delta_2 U = 0$, si ottiene il teorema di Green nella forma più ristretta, ma di più frequente applicazione,

$$(10) \qquad (\sigma)_0 V_0 = \int \left(V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma - \int U \Delta_2 V dS .$$

Supponendo infine che la funzione V, monodroma, continua e finita colle sue derivate prime, soddisfaccia anch' essa in S all' equazione $\Delta_2 V = 0$, si ottiene il teorema stesso nella forma semplificata

$$(10)_a \qquad (\sigma)_0 V_0 = \int \left(V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma .$$

che è quella di cui più spesso occorre di far uso. In ogni caso l' infinito della funzione U, cioè il polo $r = 0$, può essere situato dovunque, non esclusi i punti della superficie σ.

L' estendibilità del teorema di Green al caso del polo situato sulla superficie è stata avvertita primieramente da Betti (*Teorica delle forze newtoniane*, Pisa 1879; § XI).

§ 5.

Nel § precedente abbiamo considerato una funzione U dotata delle proprietà seguenti:

1°) di essere monodroma, continua e finita colle sue derivate prime in tutti i punti di un certo spazio, ad eccezione di un solo punto o polo $r = 0$, nel quale essa diventa infinita come $1 : r$;

2°) di soddisfare in tutto il detto spazio all' equazione $\Delta_2 U = 0$.

Una tale funzione, che in generale non è punto determinata da queste condizioni, contiene (indipendentemente da altri eventuali parametri) le coordinate di due distinti punti dello spazio, uno dei quali è il punto *variabile* cui si riferiscono i suoi diversi valori finiti, l' altro è il punto *fisso*, o *polo*, ove essa diventa infinita nel modo prescritto.

Ciò posto, consideriamo un certo spazio determinato ed invariabile, che diremo $\mathfrak{S}$, denotiamo con p un punto qualunque di questo spazio e con U_p una funzione, del tipo di U, che diventa infinita nel punto p e che soddisfa in $\mathfrak{S}$ all' equazione $\Delta_2 U_p = 0$ (dove naturalmente il simbolo Δ_2 si riferisce alle coordinate del punto variabile). Una tale funzione non è, come dicevamo, determinata, ma si può concepire che, in virtù di qualche legge, ad ogni polo p corrisponda una unica e determinata funzione U_p. Ammesso ciò, consideriamo una espressione della forma

$$(11) \qquad V = \Sigma U_p m_p . \qquad \text{oppure} \qquad V = \int U_p dm_p .$$

cioè una somma, finita od infinita, di prodotti ciascuno dei quali si riferisce ad un punto isolato, oppure ad un elemento lineare, superficiale o solido, esistente nello spazio S, ed è formato con un fattore costante m_p, oppure dm_p, che diremo *massa* del punto o dell'elemento, e con un fattore variabile che è la funzione U_p, il cui polo è in quel punto od in quell'elemento ed il cui punto variabile è situato dovunque in S, ma è lo stesso per tutte le analoghe funzioni U_p contenute nella somma.

Quest' espressione V, manifestamente analoga all'ordinaria funzione potenziale, è una funzione delle coordinate del comune punto variabile che è sempre monodroma, e che, in generale, è continua e finita colle sue derivate prime. Più precisamente, come si riconosce colle ordinarie considerazioni, la funzione V è continua e finita in tutto lo spazio S quando le masse sono distribuite in due od in tre dimensioni; essa diventa infinita come $1:r$ nei punti discreti dotati di massa e diventa infinita come $\log v$ lungo ogni linea dotata di massa, v essendo la distanza normale da questa linea. Quanto alle derivate prime di V, esse sono continue in tutto lo spazio S solamente quando le masse sono distribuite in tre dimensioni; sono discontinue, ma finite, nei posti occupati dalle masse, quando queste sono distribuite in due dimensioni, e sono infinite nei posti stessi, quando le masse sono distribuite in linee od in punti discreti. Dalle stesse ben note considerazioni si deduce che, qualunque sia la direzione n, si ha

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \Sigma \frac{\partial U_p}{\partial n} m_p \,, \qquad \text{oppure} \qquad = \int \frac{\partial U_p}{\partial n} dm_p \,,$$

purchè il punto cui si riferisce la funzione V non sia sede d'una massa finita, e neppure appartenga a linee od a superficie dotate di densità finita.

Consideriamo ora una superficie chiusa σ esistente in S e non avente parti comuni con superficie dotate di massa, nè contenente linee o punti discreti dotati di massa; denotiamo con n la sua normale interna e formiamo l' integrale

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \Sigma m_p \int \frac{\partial U_p}{\partial n} d\sigma \,, \qquad \text{oppure} \qquad = \int dm_p \int \frac{\partial U_p}{\partial n} d\sigma \,.$$

Avuto riguardo all' equazione $(9)_a$ si ha, nel primo caso,

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \Sigma (\sigma)_p m_p = 4\pi M_\sigma \,,$$

dove M_σ è la somma delle masse di tutti i punti materiali interni alla superficie σ.

Nel secondo caso, si possono escludere gli elementi dm_p che giacciono negli intorni dei punti di σ, poichè dalle ipotesi fatte circa questa superficie risulta che le masse di tali elementi non possono mai comporre una somma finita. Siamo così ricondotti al primo caso e si ha di nuovo

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 4\pi M_\sigma , \tag{12}$$

dove M_σ indica la somma delle masse, comunque distribuite, che cadono nell'interno di σ.

Da questa proprietà generale si deducono quattro teoremi distinti, relativi ai quattro casi in cui le masse occupano spazii, superficie, linee o punti.

Nel primo caso, nel quale tanto la funzione V quanto le sue derivate prime sono dovunque continue e finite, basta applicare l'equazione (8) dopo aver fatto in questa $U = 1$, giacchè l'equazione (12) diventa per tal modo

$$\int (\Delta_2 V + 4\pi k) dS = 0 ,$$

dove k è la densità nell'elemento dS dello spazio S contenuto in σ; e, poichè questo spazio può essere qualunque (in S), si ottiene così il *primo* teorema:

$$\Delta_2 V + 4\pi k = 0. \tag{12$_\sigma$}$$

Nel secondo caso, nel quale la sola funzione V è dovunque continua e finita, bisogna considerare dapprima un pezzo finito σ_0 d'una superficie dotata di massa, e, dopo averlo circondato con una superficie chiusa σ, bisogna immaginare che questa superficie si accosti indefinitamente a σ_0, da amendue le parti. Invertendo le normali n di σ e facendole coincidere, al limite, colle opposte normali n ed n' di σ_0, si deduce per tal modo dall'equazione (12)

$$\int \left(\frac{\partial V_0}{\partial n} + \frac{\partial V_0}{\partial n'} + 4\pi h \right) d\sigma_0 = 0 ,$$

dove h è la densità nell'elemento $d\sigma_0$ e V_0 è quella parte di V che si riferisce al pezzo σ_0. Ora se si pone $V = V_0 + V_1$ si ha, in ogni punto di σ_0,

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} + \frac{\partial V_1}{\partial n'} = 0 ;$$

quindi la precedente equazione si può scrivere così:

$$\int\left(\frac{\partial V}{\partial n}+\frac{\partial V}{\partial n'}+4\pi h\right)d\sigma_0=0,$$

e, poichè σ_0 è un pezzo qualunque della totale superficie dotata di massa, si ottiene il *secondo* teorema

$$(12)_b \qquad \frac{\partial V}{\partial n}+\frac{\partial V}{\partial n'}+4\pi h=0\,.$$

Nel terzo caso, bisogna di nuovo considerare un tronco s_0 d'una linea dotata di massa e, dopo averlo circondato con una superficie chiusa σ, bisogna immaginare che questa superficie si accosti indefinitamente ad s_0, da tutte le parti. Invertendo le normali n di σ, facendole coincidere, al limite, colle normali ν della linea s_0 e ponendo $d\sigma=\nu ds_0 d\theta$, dove $\nu d\theta$ è l'elemento d'un cerchietto avente per asse ds_0 e per raggio ν, si deduce dall'equazione (12)

$$\int\int\frac{\partial V_0}{\partial \nu}\,\nu ds_0 d\theta+4\pi\int g ds_0=0,$$

od anche

$$\int\left\{\int\nu\,\frac{\partial V_0}{\partial \nu}\,d\theta+4\pi g\right\}ds_0=0\,,\qquad (\lim\,\nu=0)$$

dove g è la densità nell'elemento ds_0. Ora se si pone $V=V_0+V_1$, si ha, in ogni punto di s_0:

$$\nu\,\frac{\partial V_1}{\partial \nu}=0\,,\qquad (\lim\,\nu=0)$$

quindi la precedente equazione si può scrivere così:

$$\int\left\{\int\nu\,\frac{\partial V}{\partial \nu}\,d\theta+4\pi g\right\}ds_0=0,$$

e, poichè s_0 è un tronco qualunque della totale linea dotata di massa, si ottiene il *terzo* teorema

$$(12)_c \qquad \int\nu\,\frac{\partial V}{\partial \nu}\,d\theta+4\pi g=0\,,\qquad (\lim\,\nu=0).$$

Ammettendo, come si fa di solito dietro note considerazioni, che in un punto ordinario della linea il limite, per $r = 0$, del prodotto sotto l'integrale sia indipendente dalla direzione di r, si ha

$$\int r \frac{\partial V}{\partial r} d\theta = 2\pi r \frac{\partial V}{\partial r},$$

ed il terzo teorema diventa

$$(12) \cdot \qquad r \frac{\partial V}{\partial r} + 2g = 0, \qquad (\lim r = 0).$$

Finalmente, nel quarto ed ultimo caso, stringendo σ intorno ad un punto dotato di massa, invertendo le normali n, facendole coincidere, al limite, colle geodetiche r uscenti dal punto stesso e ponendo $d\sigma = r^2(d\varpi)$, dove $(d\varpi)$ è l'angolo visuale dell'elemento $d\sigma$ rispetto al punto $r = 0$, si deduce dall'equazione (12) il *quarto* teorema

$$(12)_{\prime\prime} \qquad \int r^2 \frac{\partial V}{\partial r} (d\varpi) + 4\pi m = 0, \qquad (\lim r = 0)$$

dove m è la massa del punto $r = 0$. Ammettendo che il limite, per $r = 0$, del fattore di $(d\varpi)$ sia indipendente dalla direzione di r, questo quarto teorema diventa

$$(12)_{\prime\prime} \cdot \qquad r^2 \frac{\partial V}{\partial r} + m = 0, \qquad (\lim r = 0).$$

Ognun vede che questi teoremi, validi tutti entro il campo S, sono identici a quelli che, nelle analoghe circostanze, sussistono per le ordinarie funzioni potenziali. Per ottenere, rispetto alle funzioni (11), una teoria identica, in tutti i suoi lineamenti essenziali, a quella delle anzidette funzioni, non mancherebbe che la dimostrazione delle proprietà analoghe a quelle che le ordinarie funzioni potenziali posseggono nei punti all'infinito. Ma, per rendere possibile una tale dimostrazione, bisognerebbe innanzi tutto poter rimuovere la restrizione di un campo limitato (S) e supporre che questo campo fosse illimitato in ogni senso, senza che la funzione denominata U_p cessasse di possedere tutte le proprietà che le abbiamo attribuite. Ora, anche lasciando in disparte gli spazii del tipo riemanniano, ci sembra difficile stabilire in proposito alcuna proposizione generale. Tuttavia, per giustificare le considerazioni precedenti, basterà osservare che vi sono per lo meno due casi nei quali si può effettivamente determinare una forma di U_p valida

incondizionatamente in tutto lo spazio; e cioè il caso dello spazio ordinario, nel quale si ha, come è notissimo,

$$U_p = \frac{1}{r},$$

e quello dello spazio pseudosferico di raggio R, nel quale si ha

$$U_p = R \coth \frac{r}{R} + Cost.,$$

o meglio, determinando la costante in modo che U_p si annulli all' infinito,

$$U_p = R\left(\coth \frac{r}{R} - 1\right). \tag{13}$$

Del primo caso non occorre aggiungere parola. In quanto al secondo caso, annullandosi all' infinito ogni U_p ed ogni V, risultando finito il limite, per $r = \infty$, di ogni prodotto della forma

$$\frac{\partial V}{\partial r} \operatorname{senh}^2 \frac{r}{R}$$

e, finalmente, potendosi il quadrato dell' elemento lineare ridurre alla nota forma

$$ds^2 = dr^2 + R^2 \operatorname{senh}^2 \frac{r}{R} d\varsigma^2,$$

dove $d\varsigma$ è l' elemento lineare di un' ordinaria superficie sferica di raggio 1, col centro nel polo $r = 0$, si riconosce subito che l' integrale

$$\int\left(V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma,$$

esteso ad una qualunque regione della superficie all' infinito, è sempre nullo. Ne segue che i teoremi di Green possono essere applicati ad uno spazio infinito e che si possono quindi stabilire, per le funzioni potenziali

$$V = R \int\left(\coth \frac{r}{R} - 1\right) dm \tag{13$_a$}$$

dello spazio pseudosferico, tutti i teoremi generali relativi alle funzioni potenziali ordinarie.

§ 6.

Basandosi sulle considerazioni del § precedente ed arrestandosi all'ipotesi d'uno spazio nel quale, come nei due casi ivi citati da ultimo, si possano realizzare incondizionatamente tutte le caratteristiche d'una funzione potenziale, non s'incontra più alcuna difficoltà ad estendere ad un tale spazio le proposizioni sulle quali abbiamo fondata, nella Nota ricordata nel proemio, la dimostrazione delle formole di Maxwell.

Supponendo che le masse sieno distribuite soltanto in due ed in tre dimensioni, denotando con V la loro funzione potenziale, con h e k le densità superficiale e cubica e ponendo

$$(14)\quad \begin{cases} H = h + \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{\partial V}{\partial n} + \dfrac{\partial V}{\partial n'}\right), \\ K = k + \dfrac{1}{4\pi}\,\Delta_2 V. \end{cases}$$

si ha

$$(14)_a\quad \begin{cases} H = 0, & \text{in ogni punto di } \sigma, \\ K = 0, & \text{in ogni punto di } S, \end{cases}$$

dove S indica lo spazio *infinito* e σ la superficie od il gruppo delle superficie dotate di massa, superficie di cui n, n' sono le due normali opposte in uno stesso punto. Denotando inoltre con P il potenziale della distribuzione (h, k) sopra sè stessa, si ha

$$(14)_b\quad P = \tfrac{1}{2}\int Vh\,d\sigma + \tfrac{1}{2}\int Vk\,dS.$$

Si formi ora l'espressione

$$\int H\,\frac{U_n + U_{n'}}{2}\,d\sigma + \int KU\,dS,$$

dove U è una funzione che si annulla all'infinito e che è continua in tutto lo spazio ad eccezione dei punti della superficie σ, sulle cui due faccie essa prende

i valori designati con U_n, $U_{n'}$. Sostituendo in questa espressione, la quale è (14) identicamente nulla, i valori (14) di H e K e tenendo conto della relazione

$$\int (\Delta_1 UV + U\Delta_2 V)dS + \int \left(U_n \frac{\partial V}{\partial n} + U_{n'} \frac{\partial V}{\partial n'} \right) d\sigma = 0 .$$

che si deduce dalla formola (c) del § 5 considerando S come uno spazio limitato dalla superficie all' infinito e dalle due faccie delle superficie σ, si ottiene l'eguaglianza

$$(15) \qquad 0 = \int h \frac{U_n + U_{n'}}{2} d\sigma + \int kUdS$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int \Delta_1 UVdS - \frac{1}{8\pi} \int (U_n - U_{n'}) \left(\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n'} \right) d\sigma .$$

Si ponga in questa eguaglianza

$$(a) \qquad U = \delta V = \Sigma \frac{\partial V}{\partial q} \delta q ,$$

dove la somma si riferisce alle tre coordinate generali q_1, q_2, q_3, e dove δq_1, δq_2, δq_3 sono variazioni arbitrarie ma dovunque continue di queste coordinate. I valori $U_n = \delta V_n$, $U_{n'} = \delta V_{n'}$ sono effettivamente diseguali, perchè le derivate prime di V sono discontinue nei punti di σ.

Si dimostra, in primo luogo, esattamente come nella Nota citata, che si ha

$$(b) \qquad \int h \frac{\delta V_n + \delta V_{n'}}{2} d\sigma + \int k\delta VdS = \delta P .$$

dove δP è l' incremento che riceve il potenziale P quando tutti i punti della distribuzione (h, k) subiscono gli spostamenti dovuti alle variazioni δq delle loro coordinate (la funzione V restando sempre riferita, come apparisce dal valore (a) di δV, alla distribuzione originaria).

In secondo luogo, per essere costantemente nulla la differenza $V_n - V_{n'}$ sulle superficie σ, e per essere quindi continue le derivate prime di V tangenzialmente

a queste superficie, si ha

$$\partial V_n - \partial V_{n'} = \left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n'}\right)\delta n\,,$$

dove δn è la componente dello spostamento (δq) secondo la normale n: e di qui risulta

$$(\partial V_n - \partial V_{n'})\left(\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n'}\right) = \left\{\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial n'}\right)^2\right\}\delta n\,.$$

Ma, immaginando per un momento che la funzione V sia formata con tre variabili p, q, r della specie di quelle di cui è parola alla fine del § 1, e propriamente considerando il punto variabile cui si riferisce V come definito dalla distanza geodetica r che esso ha dalla superficie σ e dalle coordinate p, q del punto di σ donde esce la geodetica r, si ha dalla prima delle equazioni $(4)_b$, applicata ai punti contigui a σ, dall' una e dall' altra parte,

$$\Delta_1 V_n = \Delta_1' V_n + \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2, \qquad \Delta_1 V_{n'} = \Delta_1' V_{n'} + \left(\frac{\partial V}{\partial n'}\right)^2.$$

Ora le espressioni $\Delta_1' V_n$, $\Delta_1' V_{n'}$, sono fra loro eguali, perchè formate colle sole derivate di V parallele alla superficie, le quali sono continue attraverso a questa: si ha dunque

$$\Delta_1 V_n - \Delta_1 V_{n'} = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial n'}\right)^2,$$

epperò

$$(c) \qquad (\partial V_n - \partial V_{n'})\left(\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n'}\right) = (\Delta_1 V_n - \Delta_1 V_{n'})\delta n\,.$$

In virtù delle formole (a), (b), (c) l' equazione (15) diventa

$$(15)_a \qquad \delta P = \frac{1}{4\pi}\int \Delta_1(V, \delta V)dS + \frac{1}{8\pi}\int (\Delta_1 V_n - \Delta_1 V_{n'})\delta n d\sigma\,.$$

D' altronde si ha

$$(d) \qquad \Delta_1(V, \delta V) = \Sigma\Delta_1\left(V, \frac{\partial V}{\partial q}\right)\delta q + \Sigma\Delta_1(V, \delta q)\frac{\partial V}{\partial q}\,.$$

e dalla formola di definizione

$$\Delta_1 V = \Sigma_{hk} P_{hk} \frac{\partial V}{\partial q_h} \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

si deduce

$$\frac{\partial \Delta_1 V}{\partial q} = \Sigma_{hk} P_{hk} \frac{\partial V}{\partial q_h} \frac{\partial}{\partial q_h}\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) + \Sigma_{hk} P_{hk} \frac{\partial V}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial q_h}\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) + \Sigma_{hk} \frac{\partial P_{hk}}{\partial q} \frac{\partial V}{\partial q_h} \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

$$= 2\Delta_1\left(V, \frac{\partial V}{\partial q}\right) + \Sigma_{hk} \frac{\partial P_{hk}}{\partial q} \frac{\partial V}{\partial q_h} \frac{\partial V}{\partial q_k}.$$

Ne consegue

$$\Sigma \frac{\partial \Delta_1 V}{\partial q} \delta q = 2\Sigma \Delta_1\left(V, \frac{\partial V}{\partial q}\right)\delta q + \Sigma_{hk} \delta P_{hk} \frac{\partial V}{\partial q_h} \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

e quindi

$$\Sigma \Delta_1\left(V, \frac{\partial V}{\partial q}\right)\delta q = \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{\partial \Delta_1 V}{\partial q} \delta q - \tfrac{1}{2} \Sigma_{hk} \delta P_{hk} \frac{\partial V}{\partial q_h} \frac{\partial V}{\partial q_k},$$

formola che, in virtù dell' identità

$$\frac{\partial \Delta_1 V}{\partial q} \delta q = \frac{1}{Q} \left\{ \frac{\partial (Q \Delta_1 V . \delta q)}{\partial q} - \Delta_1 V \frac{\partial (Q \delta q)}{\partial q} \right\},$$

si può scrivere così:

$$\Sigma \Delta_1\left(V, \frac{\partial V}{\partial q}\right)\delta q = \frac{1}{2Q} \Sigma \frac{\partial (Q \Delta_1 V . \delta q)}{\partial q} - \frac{\Delta_1 V}{2Q} \Sigma \frac{\partial (Q \delta q)}{\partial q} - \tfrac{1}{2} \Sigma_{hk} \delta P_{hk} \frac{\partial V}{\partial q_h} \frac{\partial V}{\partial q_k};$$

sostituendo in (d) si ottiene quindi

$$(e) \qquad \Delta_1(V, \delta V) = \frac{1}{2Q} \Sigma \frac{\partial (Q \Delta_1 V . \delta q)}{\partial q}$$

$$+ \Sigma \left\{ \Delta_1(V, \delta q) \frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\Delta_1 V}{2Q} \frac{\partial (Q \delta q)}{\partial q} \right\} - \tfrac{1}{2} \Sigma_{hk} \delta P_{hk} \frac{\partial V}{\partial q_h} \frac{\partial V}{\partial q_k}.$$

Così preparata l'espressione di $\Delta_1(V, \delta V)$, bisogna farne la sostituzione nel secondo membro dell'equazione $(15)_a$. Ora, senza effettuare subito tale sostituzione,

osserviamo che dal teorema (5), applicato allo spazio infinito con riguardo alla superficie di discontinuità σ, si ha

$$\int \frac{\partial(Q\Delta_1 V.\partial q_i)}{\partial q_i}\frac{dS}{Q} = -\int \sqrt{Q_{ii}}\left\{\Delta_1 V_n \cos(n,i) + \Delta_1 V_{n'} \cos(n',i)\right\}\delta q_i d\sigma$$

$$= -\int (\Delta_1 V_n - \Delta_1 V_{n'})\sqrt{Q_{ii}} \cos(n,i)\delta q_i d\sigma ,$$

e quindi (2)

$$\Sigma \int \frac{\partial(Q\Delta_1 V.\partial q)}{\partial q}\frac{dS}{Q} = -\int (\Delta_1 V_n - \Delta_1 V_{n'})\Sigma_{hk}(Q_{hk}\frac{\partial q_h}{\partial n}\delta q_k).d\sigma .$$

Ma la formola $(1)_a$, supponendo che l' elemento ds sia nella direzione n e che l' elemento δs sia quello che rappresenta lo spostamento (δq), dà

$$\delta n = \delta s \cos(n, \delta s) = \Sigma_{hk} Q_{hk}\frac{\partial q_h}{\partial n}\delta q_k ;$$

si ha dunque

$$\Sigma \int \frac{\partial(Q\Delta_1 V.\partial q)}{\partial q}\frac{dS}{Q} = -\int (\Delta_1 V_n - \Delta_1 V_{n'})\partial n\, d\sigma .$$

Ne risulta che, mediante l' accennata sostituzione dell' espressione (c) nell' equazione $(15)_a$, si ottiene

$$\delta P = \frac{1}{4\pi}\Sigma \int \left\{\Delta_1(V,\delta q)\frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\Delta_1 V}{2Q}\frac{\partial(Q\partial q)}{\partial q}\right\} dS - \frac{1}{8\pi}\int \Sigma_{hk}\delta P_{hk}\frac{\partial V}{\partial q_h}\frac{\partial V}{\partial q_k} dS .$$

Ora, essendo

$$\Delta_1(V,\delta q) = \Sigma_{hk} P_{hk}\frac{\partial V}{\partial q_h}\frac{\partial \partial q}{\partial q_k} ,$$

se, per brevità, si pone

$$(15)_b \qquad \Sigma_k P_{hk}\frac{\partial \partial q_i}{\partial q_k} = R_{ih} ,$$

si ha

$$\Delta_1(V,\delta q_i) = \Sigma_h R_{ih}\frac{\partial V}{\partial q_h}$$

e quindi

$$\Sigma \Delta_1(V, \delta q) \frac{\partial V}{\partial q} = \Sigma_{hk} R_{hk} \frac{\partial V}{\partial q_h} \frac{\partial V}{\partial q_k} .$$

Di quì risulta

$$\delta P = \frac{1}{4\pi} \int \Sigma_{hk} (R_{hk} - \tfrac{1}{2} \delta P_{hk}) \frac{\partial V}{\partial q_h} \frac{\partial V}{\partial q_k} dS - \frac{1}{8\pi} \int \frac{\Delta_1 V}{Q} \Sigma \frac{\partial (Q \delta q)}{\partial q} dS ;$$

o meglio

$$(15)_c \quad \delta P = \frac{1}{8\pi} \int \Sigma_{hk} (R_{hk} + R_{kh} - \delta P_{hk}) \frac{\partial V}{\partial q_h} \frac{\partial V}{\partial q_k} dS - \frac{1}{8\pi} \int \frac{\Delta_1 V}{Q} \Sigma \frac{\partial (Q \delta q)}{\partial q} dS .$$

§ 7.

Fa d' uopo ora trasformare l' espressione $(15)_c$, testè ottenuta per δP, in guisa da identificarla, se è possibile, con quella di un lavoro di forze elastiche.

A tal fine bisogna innanzi tutto stabilire, facendo uso delle coordinate generali q, le formole fondamentali relative alla deformazione infinitesima d' un mezzo continuo ed alle pressioni che si possono verificare in un tal mezzo.

Dall' equazione (1)

$$ds^2 = \Sigma Q_{hk} dq_h dq_k ,$$

facendo variare con continuità la posizione d' ogni punto (q) d' un certo spazio S, che può essere quello occupato da un corpo elastico, si deduce

$$2ds\, \delta ds = \Sigma_{hk} Q_{hk} (dq_h d\delta q_k + dq_k d\delta q_h) + \Sigma_{hk} \delta Q_{hk} dq_h dq_k ,$$

equazione che, per essere

$$d\delta q_h = \Sigma \frac{\partial \delta q_h}{\partial q} \delta q ,$$

si può scrivere così:

$$\frac{\delta ds}{ds} = \tfrac{1}{2} \Sigma_{hk} \left\{ \Sigma_i \left(Q_{hi} \frac{\partial \delta q}{\partial q_k} + Q_{ki} \frac{\partial \delta q_i}{\partial q_h} \right) + \delta Q_{hk} \right\} \frac{\partial q_h}{\partial s} \frac{\partial q_k}{\partial s} .$$

Ponendo dunque

$$(16) \qquad \Sigma_i \left(Q_{ik} \frac{\partial \delta q_i}{\partial q_k} + Q_{ih} \frac{\partial \delta q_i}{\partial q_h} \right) + \delta Q_{hk} = 2 L_{hk} . \qquad (L_{hk} = L_{kh})$$

si ha

$$(16)_a \qquad \frac{\delta ds}{ds} = \Sigma_{hk} L_{hk} \frac{\partial q_h}{\partial s} \frac{\partial q_k}{\partial s} ;$$

e poichè le tre quantità

$$\frac{\partial q_1}{\partial s} , \qquad \frac{\partial q_2}{\partial s} , \qquad \frac{\partial q_3}{\partial s}$$

non dipendono che dalla direzione arbitraria dell' elemento lineare ds, è chiaro che la deformazione infinitesima, risultante dalle variazioni continue δq delle coordinate q, e consistente essenzialmente nell' alterazione delle lunghezze degli elementi lineari, è definita, nell' intorno d' ogni punto dello spazio S, dai valori delle sei quantità infinitesime L_{hk}, senza che sia necessario, per il momento, di precisare più da vicino il significato geometrico di queste sei quantità, del quale ci occuperemo in seguito (§ 10).

Ora supponiamo che lo spazio S sia quello occupato da un corpo o da un mezzo, *già deformato ed equilibrato* sotto l' azione di date forze esterne. Denoteremo con

$$F_1 dS , \qquad F_2 dS , \qquad F_3 dS$$

le componenti oblique, secondo le direzioni 1, 2, 3, della forza esterna $F dS$ agente sull' elemento di volume dS e con

$$\vec{\varphi}_1 d\sigma , \qquad \vec{\varphi}_2 d\sigma , \qquad \vec{\varphi}_3 d\sigma$$

le analoghe componenti della forza esterna $\vec{\varphi} d\sigma$ applicata all' elemento $d\sigma$ della superficie σ che limita lo spazio S.

Per esprimere le condizioni d' equilibrio del sistema, immaginiamo che ogni suo punto (q) subisca un *nuovo* spostamento (virtuale), in virtù del quale le sue coordinate diventino $(q + \delta q)$, e calcoliamo il lavoro virtuale che ne risulta per le forze esterne ed interne.

Se la direzione della forza F è quella dell' elemento lineare ds che va dal punto (q) ove la forza è applicata, al punto $(q + dq)$, si ha evidentemente

$$\frac{ds}{F} = \frac{dq_1 \sqrt{Q_{11}}}{F_1} = \frac{dq_2 \sqrt{Q_{22}}}{F_2} = \frac{dq_3 \sqrt{Q_{33}}}{F_3} ;$$

ossia

$$(17) \qquad ds : dq_1 : dq_2 : dq_3 = F : \frac{F_1}{\sqrt{Q_{11}}} : \frac{F_2}{\sqrt{Q_{22}}} : \frac{F_3}{\sqrt{Q_{33}}} .$$

In virtù di questa proporzionalità, la formola $(1)_a$ si converte nella seguente

$$(17)_a \qquad F\delta s \cos(F, \delta s) = \Sigma_{hk} \frac{Q_{hk}}{\sqrt{Q_{kk}}} F_k \delta q_h .$$

il cui primo membro è il lavoro della forza F durante lo spostamento δs del suo punto d'applicazione. Il lavoro virtuale sviluppato dalla forza esterna FdS, che agisce sull'elemento di volume dS, è dunque espresso da

$$(F_1\delta q_1 + F_2\delta q_2 + F_3\delta q_3)dS .$$

dove

$$(18) \qquad F_h = \frac{Q_{h1}F_1}{\sqrt{Q_{11}}} + \frac{Q_{h2}F_2}{\sqrt{Q_{22}}} + \frac{Q_{h3}F_3}{\sqrt{Q_{33}}} .$$

Analogamente, il lavoro sviluppato dalla forza esterna $\vec{\varphi}d\sigma$, che agisce sull'elemento di superficie $d\sigma$, è espresso da

$$(\Phi_1\delta q_1 + \Phi_2\delta q_2 + \Phi_3\delta q_3)d\sigma ,$$

dove

$$(18)_a \qquad \Phi_h = \frac{Q_{h1}\vec{\varphi}_1}{\sqrt{Q_{11}}} + \frac{Q_{h2}\vec{\varphi}_2}{\sqrt{Q_{22}}} + \frac{Q_{h3}\vec{\varphi}_3}{\sqrt{Q_{33}}} .$$

Le quantità F_h, Φ_h hanno un significato molto semplice che è utile notare. Se nella formola $(17)_a$ si suppone che l'elemento δs abbia la direzione h, si ha $\delta s = \sqrt{Q_{hh}}\,\delta q_h$ e i differenziali δq relativi alle altre due coordinate sono nulli: quindi la detta formola diventa

$$F\sqrt{Q_{hh}} \cos(F, h) = \Sigma_k \frac{Q_{hk}F_k}{\sqrt{Q_{kk}}} .$$

Di qui (18), $(18)_a$

$$(18)_b \qquad \frac{F_h}{\sqrt{Q_{hh}}} = F\cos(F, h) , \qquad \frac{\Phi_h}{\sqrt{Q_{hh}}} = \vec{\varphi}\cos(\vec{\varphi}, h) .$$

equazioni i cui secondi membri sono le componenti *ortogonali* delle forze F, φ secondo le direzioni $h = 1, 2, 3$.

Quanto alle forze interne, poichè esse non isviluppano lavoro se non in quanto l' immaginata deformazione (virtuale) altera le lunghezze degli elementi lineari, ammetteremo che il loro lavoro virtuale, nell'elemento di volume dS, sia esprimibile nella forma

$$dS\,\Sigma_{hk} L_{hk} M_{hk}\,, \qquad (M_{hk} = M_{kh}) \tag{19}$$

dove le quantità L_{hk} sono quelle definite dalle formole (16) e le quantità, per ora incognite, M_{hk} sono certe funzioni continue delle coordinate, che dipendono dallo stato di tensione del corpo deformato ed equilibrato.

Dietro quanto precede, l' equazione generale d' equilibrio è la seguente:

$$\int (F_1 \delta q_1 + F_2 \delta q_2 + F_3 \delta q_3) dS + \int (\Phi_1 \delta q_1 + \Phi_2 \delta q_2 + \Phi_3 \delta q_3) d\sigma \tag{20}$$

$$+ \int dS\,\Sigma_{hk} L_{hk} M_{hk} = 0\,;$$

e per dedurne le equazioni ordinarie, indefinite ed ai limiti, bisogna trasformare l' ultima parte del primo membro, cioè l' integrale dell' espressione (19).

In virtù delle formole (16) quest' espressione equivale alla seguente

$$\left\{ \Sigma_{hi} \frac{\partial \delta q_i}{\partial q_h} \Sigma_h Q_{hi} M_{hk} + \tfrac{1}{2} \Sigma_{hk} M_{hk} \delta Q_{hk} \right\} dS$$

o, più semplicemente, a quest' altra

$$\Sigma_{hk} \left\{ \mu_{hk} \frac{\partial \delta q_h}{\partial q_k} + \tfrac{1}{2} M_{hk} \delta Q_{hk} \right\} dS\,,$$

dove si è posto

$$\mu_{hk} = \Sigma_i Q_{ih} M_{ik}\,. \tag{21}$$

Il totale lavoro virtuale delle forze interne è quindi espresso da

$$\Sigma_{hk} \left\{ \int \mu_{hk} \frac{\partial \delta q_h}{\partial q_k} dS + \tfrac{1}{2} \int M_{hk} \delta Q_{hk} dS \right\}. \tag{21$_a$}$$

Ora si ha identicamente

$$\int \mu_{hk} \frac{\partial \delta q_h}{\partial q_k} dS = \int \frac{\partial (Q \mu_{hk} \delta q_h)}{\partial q_k} \frac{dS}{Q} - \int \frac{\partial (Q \mu_{hk})}{\partial q_k} \delta q_h \frac{dS}{Q}\,,$$

epperò, trasformando il primo integrale del secondo membro colla formola (5), si ottiene

$$\int \mu_{hk} \frac{\partial \delta q_h}{\partial q_k} dS = -\int \frac{\partial (Q\mu_{hk})}{\partial q_k} \delta q_h \frac{dS}{Q} - \int \mu_{hk} \sqrt{Q_{kk}} \cos(n, k) \delta q_h d\sigma ,$$

dove n è la normale interna alla superficie σ. L'espressione $(21)_a$ del lavoro virtuale interno diventa per tal modo

$$(21)_b \qquad \Sigma_{hk} \left\{ \int \left[\tfrac{1}{2} M_{hk} \delta Q_{hk} - \frac{\partial (Q\mu_{hk})}{\partial q_k} \frac{\delta q_h}{Q} \right] dS - \int \mu_{hk} \sqrt{Q_{kk}} \cos(n, k) \delta q_h d\sigma \right\} .$$

Consideriamo dapprima il gruppo degli integrali di superficie contenuti in quest'espressione, gruppo il quale, ponendo per un momento

$$(21)_c \qquad \Sigma_k \mu_{hk} \sqrt{Q_{kk}} \cos(n, k) = \mu_h ,$$

si riduce alla forma

$$-\int (\mu_1 \delta q_1 + \mu_2 \delta q_2 + \mu_3 \delta q_3) d\sigma .$$

Immaginando sostituita l'espressione $(21)_b$ nell'equazione (20), la quale deve essere soddisfatta qualunque sieno le variazioni δq sotto gli integrali di superficie, si ottengono subito le equazioni ai limiti, nella forma

$$\mu_1 = \Phi_1 , \qquad \mu_2 = \Phi_2 , \qquad \mu_3 = \Phi_3 ,$$

ossia $(18)_b$, $(21)_c$

$$(22) \qquad \varphi \sqrt{Q_{hh}} \cos(\varphi, h) = \Sigma_k \mu_{hk} \sqrt{Q_{kk}} \cos(n, k) , \qquad (h = 1, 2, 3) .$$

Si giunge però ad una forma più semplice, osservando che queste equazioni, le quali equivalgono $(18)_{a,b}$ alle seguenti

$$\Sigma_i \frac{Q_{hi} \varphi_i}{\sqrt{Q_{ii}}} = \Sigma_k \mu_{hk} \sqrt{Q_{kk}} \cos(n, k) ,$$

possono anche (21) scriversi nel modo che segue:

$$\Sigma_i Q_{ih} \left\{ \frac{\varphi_i}{\sqrt{Q_{ii}}} - \Sigma_k M_{ik} \sqrt{Q_{kk}} \cos(n, k) \right\} = 0 ; \qquad (h = 1, 2, 3)$$

ora, poichè il determinante delle funzioni Q_{hk} non è nullo, il sistema di queste tre equazioni può essere sostituito dal seguente

$$(22)_a \qquad \vec{p}_i = \sqrt{Q_{ii}}\, \Sigma_k M_{ik} \sqrt{Q_{kk}} \cos(n, k), \qquad (i = 1, 2, 3)$$

nel quale figurano direttamente le sei quantità M_{hk}. Queste sono le equazioni ai limiti ridotte alla loro forma più semplice.

Come è noto, queste equazioni sussistono per ogni elemento piano di normale n, immaginato nell' interno del corpo, qualora $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$, $\vec{p}_3$ rappresentino le componenti (oblique) della pressione unitaria esercitata su questo elemento da quella parte del corpo che giace nella regione opposta ad n. Da ciò emerge immediatamente la definizione precisa delle funzioni M_{hk}.

Tuttavia riesce più comodo considerare, in luogo di queste, sei nuove funzioni $\vec{p}_{hk}$, che si ottengono ponendo

$$(22)_b \qquad \vec{p}_{hk} = M_{hk} \sqrt{Q_{hh} Q_{kk}}, \qquad (\vec{p}_{hk} = \vec{p}_{kh})$$

giacchè in tal modo le equazioni $(22)_a$ assumono l' ordinaria forma

$$(23) \qquad \begin{cases} \vec{p}_1 = \vec{p}_{11} \cos(n, 1) + \vec{p}_{12} \cos(n, 2) + \vec{p}_{13} \cos(n, 3), & \vec{p}_{23} = \vec{p}_{32}, \\ \vec{p}_2 = \vec{p}_{21} \cos(n, 1) + \vec{p}_{22} \cos(n, 2) + \vec{p}_{23} \cos(n, 3), & \vec{p}_{31} = \vec{p}_{13}, \\ \vec{p}_3 = \vec{p}_{31} \cos(n, 1) + \vec{p}_{32} \cos(n, 2) + \vec{p}_{33} \cos(n, 3); & \vec{p}_{12} = \vec{p}_{21}. \end{cases}$$

Il lavoro virtuale interno (19) prende al tempo stesso la forma

$$(23)_a \qquad \int dS\, \Sigma_{hk} \frac{L_{hk} \vec{p}_{hk}}{\sqrt{Q_{hh} Q_{kk}}}.$$

Lasciando ora in sospeso la deduzione delle equazioni indefinite e l' interpretazione dei simboli $\vec{p}_{hk}$, L_{hk}, ritorniamo alla questione particolare del § 6, che ci aveva condotto alla precedente ricerca, per operare la richiesta trasformazione della formola $(15)_a$.

§ 8.

Riprendiamo a tal fine la formola (16), che trascriveremo così:

$$(24) \qquad \Sigma_m \left(Q_{hm} \frac{\partial \delta q_m}{\partial q_k} + Q_{km} \frac{\partial \delta q_m}{\partial q_h} \right) + \delta Q_{hk} = 2 L_{hk}.$$

Moltiplicando quest'equazione per P_{hk} e sommando rispetto ad amendue gli indici h, k, si ottiene un risultato che può essere scritto nel modo seguente:

$$(a) \qquad \Sigma_{km} \frac{\partial \delta q_m}{\partial q_k} \Sigma_h P_{hk} Q_{hm} + \Sigma_{km} \frac{\partial \delta q_m}{\partial q_h} \Sigma_k P_{hk} Q_{km} + \Sigma_{hk} P_{hk} \delta Q_{hk} = 2 \Sigma_{hk} P_{hk} L_{hk} .$$

Ora le somme

$$\Sigma_h P_{hk} Q_{hm} , \qquad \Sigma_k P_{hk} Q_{km}$$

sono $= 1$, oppure $= 0$, secondo che gli indici fissi, k ed m nella prima, h ed m nella seconda, sono eguali o diseguali. Inoltre la somma

$$\Sigma_{hk} P_{hk} \delta Q_{hk} ;$$

tenendo conto del significato (§ 1) delle quantità P_{hk} e considerando come tutti differenti fra loro gli elementi Q_{hk} del determinante Q^2, può scriversi così:

$$\frac{1}{Q^2} \Sigma_{hk} \frac{\partial (Q^2)}{\partial Q_{hk}} \delta Q_{hk} .$$

ed equivale quindi a

$$\frac{1}{Q^2} \partial (Q^2) , \qquad \text{ovvero a} \qquad \frac{2 \partial Q}{Q} .$$

L'equazione (a) si riduce per tal modo alla seguente

$$\Sigma \frac{\partial \delta q}{\partial q} + \frac{\delta Q}{Q} = \Sigma_{hk} P_{hk} L_{hk} ;$$

o meglio a quest'altra

$$(24)_a \qquad \frac{1}{Q} \Sigma \frac{\partial (Q \delta q)}{\partial q} = \Sigma_{hk} P_{hk} L_{hk} .$$

Moltiplichiamo ora invece l'equazione (24) per il prodotto $P_{hi} P_{kj}$ e sommiamo di nuovo rispetto ad amendue gli indici h, k. Il risultato che si ottiene può essere scritto nel modo seguente:

$$\Sigma_{km} P_{kj} \frac{\partial \delta q_m}{\partial q_k} \Sigma_h P_{hi} Q_{hm} + \Sigma_{hm} P_{hi} \frac{\partial \delta q_m}{\partial q_h} \Sigma_k P_{kj} Q_{km} + \Sigma_{hk} P_{hi} P_{kj} \delta Q_{hk} = 2 \Sigma_{hk} P_{hi} P_{kj} L_{hk} ;$$

ovvero, per un' osservazione già fatta,

$$\Sigma_k P_{kj} \frac{\partial \delta q_i}{\partial q_k} + \Sigma_h P_{hi} \frac{\partial \delta q_j}{\partial q_h} + \Sigma_{hk} P_{hi} P_{kj} \delta Q_{hk} = 2\Sigma_{hk} P_{hi} P_{kj} L_{hk} ;$$

od ancora, ricordando la segnatura $(15)_b$,

$$R_{ij} + R_{ji} + \Sigma_{hk} P_{hi} P_{kj} \delta Q_{hk} = 2\Sigma_{hk} P_{hi} P_{kj} L_{hk} .$$

Ma la somma che resta nel primo membro può alla sua volta scriversi così:

$$\Sigma_k P_{kj} \Sigma_h P_{hi} \delta Q_{hk} ;$$

e, in virtù della relazione sempre vera

$$\Sigma_h P_{hi} Q_{hk} = Cost. ,$$

può trasformarsi in quest' altra

$$- \Sigma_k P_{kj} \Sigma_h Q_{hk} \delta P_{hi} ,$$

la quale, equivalendo a

$$- \Sigma_h \delta P_{hi} \Sigma_k P_{kj} Q_{hk} ;$$

si riduce semplicemente a $- \delta P_{ij}$. Si ha dunque finalmente

$$(24)_b \qquad R_{ij} + R_{ji} - \delta P_{ij} = 2\Sigma_{hk} P_{hi} P_{kj} L_{hk} .$$

Mediante le due relazioni $(24)_a$, $(24)_b$ l' espressione $(15)_a$ di δP si riduce facilmente alla forma richiesta. Si ha infatti

$$\Sigma_{ij} (R_{ij} + R_{ji} - \delta P_{ij}) \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

$$= 2\Sigma_{hk,ij} P_{hi} P_{kj} \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial V}{\partial q_j} L_{hk} = 2\Sigma_{hk} L_{hk} \left(\Sigma_i P_{hi} \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \left(\Sigma_j P_{kj} \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) ;$$

ossia, ricordando le segnature $(3)_b$,

$$= 2\Sigma_{hk} L_{hk} V_h V_k ;$$

sostituendo quindi quest' espressione, insieme colla $(24)_a$, nell' equazione $(15)_c$, si ottiene

$$\delta P + \int dS \left\{ \Sigma_{hk} L_{hk} - \frac{1}{4\pi} V_h V_k + \frac{1}{8\pi} P_{hk} \Delta_1 V \right\} = 0 .$$

Il confronto dell' integrale contenuto in quest' equazione coll' integrale $(23)_a$, rappresentativo di un lavoro virtuale di forze elastiche, conduce immediatamente alle sei relazioni

$$(25) \qquad \varphi_{hk} = -\frac{\sqrt{Q_{hh} Q_{kk}}}{4\pi} V_h V_k + \frac{P_{hk}\sqrt{Q_{hh} Q_{kk}}}{8\pi} \Delta_1 V , \qquad (h, k = 1, 2, 3)$$

le quali soddisfanno alla questione proposta, cioè porgono le cercate componenti φ_{hk} delle pressioni e tensioni che rappresentano il sistema delle forze dovute alla funzione potenziale V.

Queste formole, relativamente semplici, si semplificano ancor più se si suppone che le coordinate q sieno ortogonali. Si ha infatti in questo caso

$$Q_{23} = Q_{31} = Q_{12} = 0 . \qquad P_{23} = P_{31} = P_{12} = 0 ,$$

$$P_{11} Q_{11} = P_{22} P_{22} = Q_{33} Q_{33} = 1 . \qquad V_h = \frac{1}{Q_{hh}} \frac{\partial V}{\partial q_h} .$$

Scrivendo quindi Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2 in luogo di Q_{11}, Q_{22}, Q_{33} si trovano le formole

$$(25)_a \qquad \begin{cases} \varphi_{hh} = -\dfrac{1}{4\pi Q_h^2} \left(\dfrac{\partial V}{\partial q_h}\right)^2 + \dfrac{1}{8\pi} \Delta_1 V , \\ \varphi_{hk} = -\dfrac{1}{4\pi Q_h Q_k} \dfrac{\partial V}{\partial q_h} \dfrac{\partial V}{\partial q_k} , \qquad \left(h \gtrless k\right) \end{cases}$$

le quali, per $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$, $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$, si riducono immediatamente a quelle di Maxwell, che abbiamo riferite nel Proemio.

Per interpretare agevolmente le formole (25) nel caso più generale, cioè indipendentemente da ogni supposizione sulla natura dello spazio, giova scegliere le coordinate q_1, q_2, q_3 nel modo seguente, il quale non è vincolato ad alcuna restrizione. Si supponga che la coordinata q_1 abbia dovunque lo stesso valore di V, e che le linee ($q_2 = Cost.$, $q_3 = Cost.$) sieno ortogonali alle superficie $V = Cost.$, cioè sieno le linee di forza relative al sistema di masse di cui V è la funzione potenziale.

Le superficie $q_2 = Cost.$, $q_3 = Cost.$ essendo, per tali ipotesi, ortogonali alle $q_1 = Cost.$, si ha

$$Q_{12} = 0, \qquad Q_{13} = 0; \qquad P_{12} = 0, \qquad P_{13} = 0.$$

$$P_{11} = \frac{1}{Q_{11}}, \qquad P_{22} = \frac{Q_{11}Q_{33}}{Q^2}, \qquad P_{33} = \frac{Q_{11}Q_{22}}{Q^2}, \qquad P_{23} = -\frac{Q_{11}Q_{23}}{Q_2}.$$

e, per essere $V = q_1$, si ha pure

$$V_1 = \frac{1}{Q_{11}}, \qquad V_2 = V_3 = 0, \qquad \Delta_1 V = \frac{1}{Q_{11}}.$$

Le formole (25) diventano per tal modo

$$\vec{\varphi}_{11} = -\frac{1}{8\pi Q_{11}}, \qquad \vec{\varphi}_{22} = \vec{\varphi}_{33} = \frac{Q_{22}Q_{33}}{8\pi Q^2}.$$

$$\vec{\varphi}_{23} = -\frac{Q_{23}\sqrt{Q_{22}Q_{33}}}{8\pi Q^2}, \qquad \vec{\varphi}_{31} = \vec{\varphi}_{12} = 0.$$

dove

$$Q^2 = Q_{11}(Q_{22}Q_{33} - Q_{23}^2).$$

Ora si osservi che, sebbene non sia lecito supporre in generale $Q_{23} = 0$, giacchè ciò equivarrebbe ad ammettere che le superficie di livello facessero parte di un sistema triplo ortogonale, si può però sempre supporre che sia $Q_{23} = 0$ in un punto determinato, ma del resto qualunque, anzi in tutti i punti d'una superficie di livello determinata, ma del resto qualunque. Basta infatti prendere per coordinate q_2, q_3 i parametri d'un doppio sistema ortogonale di linee tracciate su questa superficie, determinando così ciascuna linea di forza per mezzo del punto (q_2, q_3) in cui essa incontra la superficie stessa. Ammettendo, in base a ciò, che in un punto determinato, ma del resto arbitrario, si abbia $Q_{23} = 0$, si ha, nello stesso punto,

$$Q^2 = Q_{11}Q_{22}Q_{33}$$

ed i precedenti valori delle quantità $\vec{\varphi}_{hk}$ diventano semplicemente

$$-\vec{\varphi}_{11} = \vec{\varphi}_{22} = \vec{\varphi}_{33} = \frac{\Delta_1 V}{8\pi}, \qquad \vec{\varphi}_{23} = \vec{\varphi}_{31} = \vec{\varphi}_{12} = 0.$$

D'altronde le dette quantità, riferendosi in tal caso a tre elementi piani *ortogonali*, che s'intersecano lungo le linee 1, 2, 3, acquistano, in virtù delle equazioni (23), l'ordinario significato di componenti (ortogonali) di pressione, e precisamente le $\vec{\varphi}_{11}$, $\vec{\varphi}_{22}$, $\vec{\varphi}_{33}$ di componenti *normali*, le $\vec{\varphi}_{23}$, $\vec{\varphi}_{31}$, $\vec{\varphi}_{12}$ di componenti *tangenziali*. Ne risulta senz'altro che la distribuzione delle pressioni e tensioni equivalenti al sistema delle forze di funzione potenziale V resta sempre la stessa di quella che si verifica nello spazio ordinario, e che quindi la notevolissima correlazione di forze espressa dalle formole di Maxwell non costituisce punto una peculiarità di questo spazio.

§ 9.

Riprendiamo ora gli svolgimenti che avevamo interrotti alla fine del § 7.

L'integrale di volume contenuto nell'espressione $(21)_b$ può essere scritto così:

$$\int dS \left\{ \tfrac{1}{2} \Sigma_{hk} M_{hk} \partial Q_{hk} - \frac{1}{Q} \Sigma_i \delta q_i \Sigma_j \frac{\partial (Q \mu_{ij})}{\partial q_j} \right\}$$

epperò il coefficiente di δq_i nell'espressione sotto l'integrale è

$$\tfrac{1}{2} \Sigma_{hk} M_{hk} \frac{\partial Q_{hk}}{\partial q_i} - \frac{1}{Q} \Sigma_j \frac{\partial (Q \mu_{ij})}{\partial q_j} .$$

Facendo dunque la sostituzione nell'equazione (20) dell'espressione $(21)_b$ del lavoro virtuale interno, ed annullando i coefficienti delle variazioni arbitrarie δq_i sotto gli integrali di volume, si ottengono (18) le equazioni indefinite d'equilibrio sotto la forma

$$\tfrac{1}{2} \Sigma_{hk} M_{hk} \frac{\partial Q_{hk}}{\partial q_i} - \frac{1}{Q} \Sigma_j \frac{\partial (Q \mu_{ij})}{\partial q_j} + \Sigma_j \frac{Q_{ij} F_j}{\sqrt{Q_{jj}}} = 0 , \qquad (i = 1, 2, 3) .$$

Moltiplicando quest'equazione per P_{im} e sommando rispetto all'indice i si ottiene

$$\tfrac{1}{2} \Sigma_{hki} M_{hk} P_{im} \frac{\partial Q_{hk}}{\partial q_i} - \frac{1}{Q} \Sigma_{ij} P_{im} \frac{\partial (Q \mu_{ij})}{\partial q_j} + \frac{F_m}{\sqrt{Q_{mm}}} = 0 ,$$

equazione cui si può dare la forma

$$(26) \qquad \frac{1}{2}\Sigma_{hki} M_{hk} P_{im} \frac{\partial Q_{hk}}{\partial q_i} + \Sigma_{ij} \frac{\partial P_{im}}{\partial q_j} \mu_{ij}$$

$$- \frac{1}{Q} \Sigma_{ij} \frac{\partial (Q P_{im} \mu_{ij})}{\partial q_j} + \frac{F_m}{\sqrt{Q_{mm}}} = 0 , \qquad (m = 1, 2, 3) .$$

Ora introducendo nel secondo membro dell' identità

$$\Sigma_{ij} \frac{\partial (Q P_{im} \mu_{ij})}{\partial q_j} = \Sigma_j \frac{\partial}{\partial q_j} [Q \Sigma_i P_{im} \mu_{ij}]$$

il valore (21) di μ_{ij}, si ottiene

$$(a) \qquad \Sigma_{ij} \frac{\partial (Q P_{im} \mu_{ij})}{\partial q_j} = \Sigma_j \frac{\partial (Q M_{mj})}{\partial q_j} .$$

Con questa stessa sostituzione si ottiene successivamente

$$\Sigma_{ij} \frac{\partial P_{im}}{\partial q_j} \mu_{ij} = \Sigma_{ijn} \frac{\partial P_{im}}{\partial q_j} Q_{in} M_{nj} = \Sigma_{nj} M_{nj} \Sigma_i \frac{\partial P_{im}}{\partial q_j} Q_{in}$$

$$= - \Sigma_{nj} M_{nj} \Sigma_i P_{im} \frac{\partial Q_{in}}{\partial q_j} = - \Sigma_{ijn} M_{nj} P_{im} \frac{\partial Q_{in}}{\partial q_j} ,$$

epperò si può scrivere

$$\Sigma_{ij} \frac{\partial P_{im}}{\partial q_j} \mu_{ij} = - \frac{1}{2} \Sigma_{hki} M_{hk} P_{im} \frac{\partial Q_{hi}}{\partial q_k} = - \Sigma_{hki} M_{hk} P_{im} \frac{\partial Q_{ki}}{\partial q_h}$$

ed anche

$$(b) \qquad \Sigma_{ij} \frac{\partial P_{im}}{\partial q_j} \mu_{ij} = - \frac{1}{2} \Sigma_{hki} M_{hk} P_{im} \left(\frac{\partial Q_{hi}}{\partial q_k} + \frac{\partial Q_{ki}}{\partial q_h} \right) .$$

In virtù delle eguaglianze (a), (b) l' equazione (26) diventa

$$\frac{1}{2} \Sigma_{hki} M_{hk} P_{im} \left(\frac{\partial Q_{hk}}{\partial q_i} - \frac{\partial Q_{ni}}{\partial q_k} - \frac{\partial Q_{ki}}{\partial q_h} \right) - \frac{1}{Q} \Sigma_j \frac{\partial (Q M_{ij})}{\partial q_j} + \frac{F_m}{\sqrt{Q_{mm}}} = 0$$

ed introducendo finalmente $(22)_a$ le funzioni φ_{hk} al posto delle M_{hk}, si ottengono

le equazioni indefinite d' equilibrio sotto la forma seguente, che considereremo come definitiva:

$$(27)\qquad \frac{F_m}{\sqrt{Q_{mm}}} = \frac{1}{Q}\sum_j \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{Q\vec{\varphi}_{mi}}{\sqrt{Q_{mm}Q_{ii}}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{hki}\frac{P_{mi}\vec{\varphi}_{hk}}{\sqrt{Q_{hh}Q_{kk}}}\left(\frac{\partial Q_{hi}}{\partial q_k}+\frac{\partial Q_{ki}}{\partial q_h}-\frac{\partial Q_{hk}}{\partial q_i}\right), \qquad (m=1,2,3).$$

Perchè queste equazioni possano essere debitamente interpretate, resta che si assegni un preciso significato meccanico alle sei funzioni $\vec{\varphi}_{hk}$. A tal fine basta osservare che denotando, in analogia colla segnatura usata da Kirchhoff, con

$$K_1, \qquad K_2, \qquad K_3$$

le componenti (oblique) nelle direzioni 1, 2, 3 della pressione unitaria che si esercita sopra un elemento piano tangente, nel punto (q_1, q_2, q_3), alla superficie $q_k = Cost.$ che passa per questo punto, e scegliendo come normale n di questo elemento quella che fa un angolo acuto colla direzione k, talchè sia $(2)_a$

$$\cos(n,k) = \frac{1}{\sqrt{P_{kk}Q_{kk}}},$$

si ha dalle equazioni (23)

$$K_1 = \frac{\vec{\varphi}_{1k}}{\sqrt{P_{kk}Q_{kk}}}, \qquad K_2 = \frac{\vec{\varphi}_{2k}}{\sqrt{P_{kk}Q_{kk}}}, \qquad K_3 = \frac{\vec{\varphi}_{3k}}{\sqrt{P_{kk}Q_{kk}}},$$

epperò

$$(28)\qquad \vec{\varphi}_{hk} = K_h\sqrt{P_{kk}Q_{kk}}.$$

Questa formola assegna il richiesto significato meccanico alle funzioni $\vec{\varphi}_{hk}$; e, poichè queste soddisfanno d' altronde alla condizione $\vec{\varphi}_{hk} = \vec{\varphi}_{kh}$, ne risulta che ha luogo la relazione

$$(28)_a\qquad H_h\sqrt{P_{hh}Q_{hh}} = K_h\sqrt{P_{kk}Q_{kk}}.$$

Questa relazione corrisponde, rispetto alle attuali componenti oblique, alla notissima $H_h = K_h$, che si verificherebbe se si trattasse di componenti ortogonali.

§ 10.

Per completare in ogni punto la trattazione delle questioni fondamentali relative alla teoria dell' elasticità in coordinate generali, aggiungeremo le più essenziali interpretazioni delle formole risguardanti la deformazione infinitesima.

La teoria geometrica di tali deformazioni è, in fondo, tutta contenuta nell' equazione $(16)_a$. Ma per assegnare, senz' alcun sussidio di considerazioni estranee, il significato di *tutti* i coefficienti L_{hk}, è utile stabilire un' altra equazione, di cui la $(16)_a$ non è che un caso particolare.

Denotiamo con ds e ds' due elementi lineari quali si vogliano, uscenti dal punto (q) e corrispondenti rispettivamente agli incrementi (dq) e $(d'q)$ delle coordinate di questo punto: denotiamo inoltre con θ l' angolo di questi due elementi. Facendo variare, secondo la caratteristica δ, tutte le quantità che entrano nella formola analoga alla $(1)_a$

$$ds\,ds'\cos\theta = \Sigma_{hk} Q_{hk} dq_h d'q_k\,.$$

si ottiene

$$(ds\,\delta ds' + ds'\,\delta ds)\cos\theta + ds\,ds'\,\delta\cos\theta$$
$$= \Sigma_{hk} Q_{hk}(dq_h d'\delta q_k + d'q_k d\delta q_h) + \Sigma_{hk}\delta Q_{hk} dq_h d'q_k\,.$$

Ma, per essere

$$d\delta q_h = \Sigma\,\frac{\partial\delta q_h}{\partial q}\,dq\,, \qquad d'\delta q_k = \Sigma\,\frac{\partial\delta q_k}{\partial q}\,d'q\,.$$

il secondo membro può scriversi così:

$$\Sigma_{hk} Q_{hk}\left(\frac{\partial\delta q_k}{\partial q_i}\,dq_h d'q_i + \frac{\partial\delta q_h}{\partial q_i}\,dq_i d'q_k\right) + \Sigma_{hk}\delta Q_{hk} dq_h d'q_k$$
$$= \Sigma_{hk}\left\{\Sigma_i\left(Q_{hi}\,\frac{\partial\delta q_i}{\partial q_k} + Q_{ki}\,\frac{\partial\delta q_i}{\partial q_h}\right) + \delta Q_{hk}\right\} dq_h d'q_k\,.$$

e quindi, avendosi

$$dq_h = \frac{\partial q_h}{\partial s}\,ds\,. \qquad d'q_k = \frac{\partial q_k}{\partial s'}\,ds'\,.$$

la trovata equazione diventa (16)

$$\left(\frac{\delta ds}{ds} + \frac{\delta ds'}{ds'}\right)\cos\theta + \delta\cos\theta = 2\Sigma_{hk} L_{hk}\,\frac{\partial q_h}{\partial s}\,\frac{\partial q_k}{\partial s'}\,. \tag{29}$$

È questa l'equazione generale cui alludevamo, e da cui si ricava la $(16)_a$ supponendo che le direzioni dei due elementi lineari ds, ds' coincidano fra loro.

Attribuendo a questi due elementi le direzioni h, k, si ha

$$ds = ds_h = dq_h \sqrt{Q_{hh}}, \qquad ds' = ds_k = dq_k \sqrt{Q_{kk}},$$

e l'equazione precedente, la quale dà, in tal caso,

$$(29)_a \qquad \left(\frac{\delta ds_h}{ds_h} + \frac{\delta ds_k}{ds_k}\right) \cos(h, k) + \delta \cos(h, k) = \frac{2 L_{hk}}{\sqrt{Q_{hh} Q_{kk}}},$$

somministra il richiesto significato geometrico di tutte le quantità L_{hk}.

In particolare, per $h = k$, si ha

$$L_{hh} = Q_{hh} \frac{\delta ds_h}{ds_h},$$

talchè, denotando con δl_1, δl_2, δl_3 le dilatazioni lineari nelle direzioni 1, 2, 3, si ha

$$(30) \qquad \delta l_1 = \frac{L_{11}}{Q_{11}}, \qquad \delta l_2 = \frac{L_{22}}{Q_{22}}, \qquad \delta l_3 = \frac{L_{33}}{Q_{33}}.$$

Sostituendo poi questi valori nell'equazione $(29)_a$ e denotando con $\delta\lambda_1$, $\delta\lambda_2$, $\delta\lambda_3$ le variazioni dei coseni degli angoli (23), (31), (12), si trova

$$(30)_a \qquad \begin{cases} \delta\lambda_1 = \dfrac{2L_{23}}{\sqrt{Q_{22}Q_{33}}} - \left(\dfrac{L_{22}}{Q_{22}} + \dfrac{L_{33}}{Q_{33}}\right) \cos(23), \\ \delta\lambda_2 = \dfrac{2L_{31}}{\sqrt{Q_{33}Q_{11}}} - \left(\dfrac{L_{33}}{Q_{33}} + \dfrac{L_{11}}{Q_{11}}\right) \cos(31), \\ \delta\lambda_3 = \dfrac{2L_{12}}{\sqrt{Q_{11}Q_{22}}} - \left(\dfrac{L_{11}}{Q_{11}} + \dfrac{L_{22}}{Q_{22}}\right) \cos(12), \end{cases}$$

equazioni cui si potrebbe dare un'altra forma, approfittando delle note relazioni

$$\cos(23) = \frac{Q_{23}}{\sqrt{Q_{22}Q_{33}}}, \quad \cos(31) = \frac{Q_{31}}{\sqrt{Q_{33}Q_{11}}}, \quad \cos(12) = \frac{Q_{12}}{\sqrt{Q_{11}Q_{22}}}.$$

Per tal modo si ottengono, in funzione delle quantità L_{hk} e quindi (16) delle variazioni δq, i sei elementi

$$\delta l_1, \quad \delta l_2, \quad \delta l_3; \qquad \delta\lambda_1, \quad \delta\lambda_2, \quad \delta\lambda_3$$

che definiscono compiutamente la deformazione infinitesima del parallelepipedo elementare determinato da due terne infinitamente vicine di superficie dei sistemi $q_1 = Cost.$, $q_2 = Cost.$, $q_3 = Cost.$

Per far rientrare queste formole nel tipo ordinario, conviene introdurre al posto delle quantità L_{hk} sei nuove quantità ψ_{hk} definite dalle formole

$$(31) \qquad 2\psi_{hk} = \frac{1}{\sqrt{Q_{hh}Q_{kk}}} \Sigma_i \left(Q_{hi} \frac{\partial \varkappa_i}{\partial q_k} + Q_{ki} \frac{\partial \varkappa_i}{\partial q_h} + \frac{\partial Q_{hk}}{\partial q_i} \varkappa_i \right),$$

dove $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ sono tre funzioni *infinitamente piccole* delle variabili q_1, q_2, q_3. L'intervento di queste tre funzioni è dovuto a ciò, che, in luogo di considerare le coordinate q come relative ai punti materiali del corpo *già deformato ed equilibrato* (come finora abbiam fatto, per semplicità), giova di regola considerarle come relative ai punti del corpo *nello stato naturale*, rappresentando invece con $q_1 + \varkappa_1$, $q_2 + \varkappa_2$, $q_3 + \varkappa_3$ le coordinate, nello stato di deformazione del corpo, di quel punto materiale che, nello stato naturale del corpo stesso, aveva le coordinate q_1, q_2, q_3. In tale ipotesi, le variazioni (virtuali) che abbiamo contrassegnate colla caratteristica δ non si applicano che alle funzioni $\varkappa$, e, identificando le variazioni $\delta\varkappa$ di queste funzioni colle variazioni δq contenute nelle formole precedenti, si trova (16), (31)

$$(31)_a \qquad L_{hk} = \sqrt{Q_{hh}Q_{kk}}\, \delta\psi_{hk},$$

cosicchè le formole (30), $(30)_a$ danno luogo a queste altre

$$(31)_b \qquad \begin{cases} l_i = \psi_{ii}, & (i = 1, 2, 3) \\ \lambda_i = 2\psi_{hk} - (\psi_{hh} + \psi_{kk}) \cos(h, k), \end{cases}$$

nella seconda delle quali hki è una permutazione circolare di 123. Queste quantità l_i, λ_i definiscono evidentemente la deformazione che possiamo dire *totale* del già mentovato parallelepipedo, cioè quella deformazione che era considerata come preesistente a quell'altra (virtuale) che corrisponde alla differenziazione per δ e che è definita dalle formole (30), 30_a, dove le quantità L_{hk} acquistano ora il significato $(31)_a$.

Le tre dilatazioni principali, relative alla deformazione ($\varkappa$) sono (come si riconosce molto facilmente) le radici dell'equazione di 3° grado in l:

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} N_{11} - lQ_{11} & N_{12} - lQ_{12} & N_{13} - lQ_{13} \\ N_{21} - lQ_{21} & N_{22} - lQ_{22} & N_{23} - lQ_{23} \\ N_{31} - lQ_{31} & N_{32} - lQ_{32} & N_{33} - lQ_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

dove per comodo si è posto

$$(32)_a \qquad N_{hk} = \psi_{hk}\sqrt{Q_{hh}Q_{kk}}\,.$$

Le direzioni di queste dilatazioni sono determinate da due delle tre equazioni che si ottengono eguagliando a zero le derivate rispetto a q_1', q_2', q_3' della funzione quadratica

$$(32)_b \qquad \Sigma_{hk}(N_{hk} - lQ_{hk})q_h'q_k'\,,$$

dove l è una radice dell' equazione (32) e dove q' è la derivata di q nella direzione principale corrispondente.

Per determinare le tre pressioni principali osserviamo che dalle formole $(18)_{a,\,b}$ si ha

$$\sqrt{Q_{ii}}\,\vec{\varphi}\cos(\vec{\varphi}, i) = \Sigma_h \frac{Q_{hi}\vec{\varphi}_h}{\sqrt{Q_{hh}}}\,,$$

donde si ricava reciprocamente

$$\vec{\varphi}_i = \vec{\varphi}\sqrt{Q_{ii}}\,\Sigma_k P_{ik}\sqrt{Q_{kk}}\cos(\vec{\varphi}, k)\,.$$

Le equazioni $(22)_a$ si possono dunque scrivere così:

$$\Sigma_k M_{ik}\sqrt{Q_{kk}}\cos(n, k) = \vec{\varphi}\Sigma_k P_{ik}\sqrt{Q_{kk}}\cos(\vec{\varphi}, k)\,.$$

Quando $\vec{\varphi}$ è una pressione principale, la sua direzione coincide con quella di n e si ha quindi

$$(33) \qquad \Sigma_k(M_{ik} - \vec{\varphi}P_{ik})\sqrt{Q_{kk}}\cos(\vec{\varphi}, k) = 0\,.$$

Le grandezze delle tre pressioni principali sono date quindi dalle radici dell' equazione di 3° grado in $\vec{\varphi}$

$$(33)_a \qquad \begin{vmatrix} M_{11} - \vec{\varphi}P_{11} & M_{12} - \vec{\varphi}P_{12} & M_{13} - \vec{\varphi}P_{13} \\ M_{21} - \vec{\varphi}P_{21} & M_{22} - \vec{\varphi}P_{22} & M_{23} - \vec{\varphi}P_{23} \\ M_{31} - \vec{\varphi}P_{31} & M_{32} - \vec{\varphi}P_{32} & M_{33} - \vec{\varphi}P_{33} \end{vmatrix} = 0\,,$$

dove le quantità M_{hk} sono definite per mezzo delle $\vec{\varphi}_{hk}$ dalle formole $(22)_b$. Le direzioni delle pressioni principali restano poscia determinate dalle equazioni (33).

Si può osservare che facendo la moltiplicazione per colonne del determinante (33)$_a$ per il determinante Q^2, si ottiene la seguente equazione, equivalente alla (33)$_a$.

$$\begin{vmatrix} \mu_{11} - \bar{\varphi} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} - \bar{\varphi} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} - \bar{\varphi} \end{vmatrix} = 0 ,$$

dove le quantità μ_{hk} sono definite dalle formole (21). Quest'altra forma dell'equazione in $\bar{\varphi}$ si poteva ottenere direttamente dalle equazioni (22).

Con un'ovvia modificazione dell'ordinario ragionamento e tenendo conto delle proprietà ammesse per la quadratica (1), si dimostra che le radici delle equazioni (32), (33)$_a$ sono tutte reali e che le direzioni delle dilatazioni principali, come pure quelle delle pressioni principali, formano una terna ortogonale.

In virtù delle equazioni (31)$_a$, l'espressione (23)$_a$ del lavoro virtuale interno diventa

$$(34) \qquad \int dS \Sigma_{hk} \bar{\varphi}_{hk} \partial \psi_{hk} ,$$

e dalle note considerazioni si conclude che deve esistere una funzione intera $-\Pi$ delle sei quantità ψ_{hk}, omogenea e quadratica rispetto a queste, di cui la somma contenuta sotto il segno integrale è la variazione esatta. La mutua dipendenza fra le *sei* quantità ψ_{hk}, che definiscono lo *stato di deformazione* del corpo, e le *sei* quantità $\bar{\varphi}_{hk}$, che ne definiscono lo *stato di tensione*, è quindi espressa dalle sei equazioni

$$(34)_a \qquad \bar{\varphi}_{ii} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi_{ii}} , \qquad 2\bar{\varphi}_{hk} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi_{hk}} , \qquad \left(h \gtrless k\right) .$$

L'integrale

$$(34)_b \qquad \int \Pi dS$$

è l'espressione dell'*energia di deformazione*.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

QA
556
B4

Beltrami, Eugenio
Sull'uso delle coordinate
curvilinee nelle teorie del
potenziale e dell'elasticita

P&ASci.